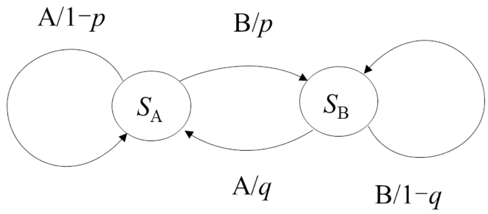
問題 3A　次のマルコフ情報源 S について次の問いに答えよ．



(1) S の定常分布を求めよ．
(2) S の 1 次エントロピー$H_1(S)$と 2 次エントロピー$H_2(S)$を求めよ．
(3) p を x 軸，q を y 軸，$H_1(S)$を z 軸にとり，p，q，$H_1(S)$の関係を図示せよ．
(4) n を横軸，S の n 次エントロピー$H_n(S)$を縦軸として，n と $H_n(S)$の関係をグラフで表せ．

解答例

(1) S_A の確率を x，S_B の確率を y とすれば，

$$\begin{cases} x+y=1 \\ (1-p)x+qy=x \end{cases}$$

ゆえに $px=qy$，　$x=\dfrac{q}{p+q}, y=\dfrac{p}{p+q}$

※ 0 と 1 の発生確率は，

0 の発生確率：$(1-p)x+qy=\dfrac{(1-p)q}{p+q}+\dfrac{pq}{p+q}=\dfrac{q}{p+q}$，　1 の発生確率：$\dfrac{p}{p+q}$

(2) S の 1 次エントロピー：

$$P(0)=P(0,S_0)+P(0,S_1)=P(S_0)P(0\,|\,S_0)+P(S_1)P(0\,|\,S_1)=\frac{q}{p+q}\times(1-p)+\frac{p}{p+q}\times q=\frac{q}{p+q}$$

$$P(1)=P(1,S_0)+P(1,S_1)=P(S_0)P(1\,|\,S_0)+P(S_1)P(1\,|\,S_1)=\frac{q}{p+q}\times p+\frac{p}{p+q}\times(1-q)=\frac{p}{p+q}$$

よって，　$H_1(S)$ は，

$$H_1(S)=\mathscr{H}\left(\frac{p}{p+q}\right)$$

S の 2 次エントロピー：

$$P(00) = P(00, S_0) + P(00, S_1) = P(S_0)P(00 \mid S_0) + P(S_1)P(00 \mid S_1)$$
$$= \frac{q}{p+q} \times (1-p) \times (1-p) + \frac{p}{p+q} \times q \times (1-p) = \frac{(1-p)q}{p+q}$$
$$P(01) = P(01, S_0) + P(01, S_1) = P(S_0)P(01 \mid S_0) + P(S_1)P(01 \mid S_1)$$
$$= \frac{q}{p+q} \times (1-p) \times p + \frac{p}{p+q} \times q \times p = \frac{pq}{p+q}$$
$$P(10) = P(10, S_0) + P(10, S_1) = P(S_0)P(10 \mid S_0) + P(S_1)P(10 \mid S_1)$$
$$= \frac{q}{p+q} \times p \times q + \frac{p}{p+q} \times (1-q) \times q = \frac{pq}{p+q}$$
$$P(11) = P(11, S_0) + P(11, S_1) = P(S_0)P(11 \mid S_0) + P(S_1)P(11 \mid S_1)$$
$$= \frac{q}{p+q} \times p \times (1-q) + \frac{p}{p+q} \times (1-q) \times (1-q) = \frac{p(1-q)}{p+q}$$

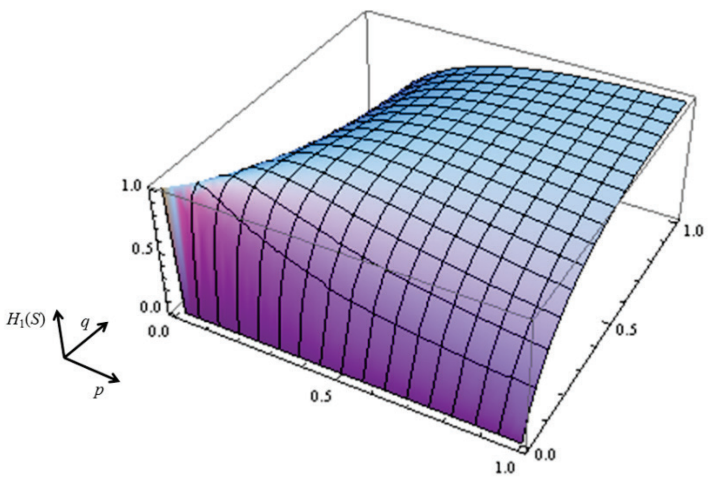
よって，　$H_2(S)$は，

$$H_1(S^2) = -\left(\frac{(1-p)q}{p+q} \log_2 \frac{(1-p)q}{p+q} + \frac{pq}{p+q} \log_2 \frac{pq}{p+q} + \frac{pq}{p+q} \log_2 \frac{pq}{p+q} + \frac{p(1-q)}{p+q} \log_2 \frac{p(1-q)}{p+q} \right)$$

Sの（1 情報源記号あたりの）2 次エントロピーは，

$$H_2(S) = \frac{H_1(S^2)}{2}$$

(3) 次のようになる．



ポイントは，p=0, q=0～p=1,q=1 の対角線上で $H_1(S)$=1．一方，p=0, q=1, p=1,q=0 では，$H_1(S)$=0

(4) $H_n(S)$を小さな n に対して plot すると，

$$H_1(S) = \mathscr{H}\left(\frac{p}{p+q}\right)$$

$$H_1(S^2) = -\frac{1}{2}\left(\frac{(1-p)q}{p+q}\log_2\frac{(1-p)q}{p+q} + \frac{pq}{p+q}\log_2\frac{pq}{p+q} + \frac{pq}{p+q}\log_2\frac{pq}{p+q} + \frac{p(1-q)}{p+q}\log_2\frac{p(1-q)}{p+q}\right)$$

$n\to\infty$については,

$H_{S_0}(S) = \mathscr{H}(p) \quad H_{S_1}(S) = \mathscr{H}(q)$　だから,

$$H(S) = \frac{q}{p+q}H_{S_0}(S) + \frac{p}{p+q}H_{S_1}(S) = \frac{q}{p+q}\mathscr{H}(p) + \frac{p}{p+q}\mathscr{H}(q)$$

大小関係と性質を踏まえて図を描くと次のようになる.