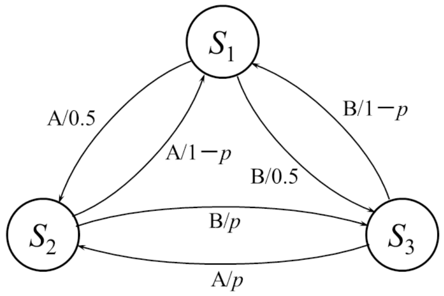
$\boxed{\text{問題 3B}}$　下図のマルコフ情報源 S について以下の問いに答えよ．



（$0 \le p \le 1$）

$\boxed{\text{設問１}}$ S が正規マルコフ情報源であるための，p に関する必要十分条件を示せ．
$\boxed{\text{設問２}}$ S が正規マルコフ情報源であるとき，その 1 情報源記号あたりの 1 次エントロピー $H_1(S)$ とエントロピー $H(S)$ の値を求めよ．ただし， $H(S) = \lim_{n \to \infty} H_n(S)$ である．

$\boxed{\text{設問３}}$ S が正規マルコフ情報源であるとき，p と $H(S)$ の関係を，p を横軸， $H(S)$ を縦軸とする 2 次元平面上に表せ．また， $H(S)$ の値を最大化する p の値を示せ．

$\boxed{\text{解答例}}$

設問１：

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 0.5 & 0.5 \\ 1-p & 0 & p \\ 1-p & p & 0 \end{bmatrix}$$

p=1 なら S_1 は過渡状態になってしまうから， p=1 でないことが必要条件になる．
p=0 なら S_1 は周期的になり，正規マルコフではなくなる．
$0<p<1$ ならば,

$$U = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, U^2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

なので，正規マルコフである．

⇒　p=0 ではなく，p=1 でもない．あるいは，$0<p<1$

設問２：正規マルコフであるので， $P(S_i) = w_i \quad (i = 1,2,3)$ と置いて，定常状態に関する方程式：

$$\begin{cases} (w_1, w_2, w_3) \cdot T = (w_1, w_2, w_3) \begin{bmatrix} 0 & 0.5 & 0.5 \\ 1-p & 0 & p \\ 1-p & p & 0 \end{bmatrix} = (w_1, w_2, w_3) \\ w_1 + w_2 + w_3 = 1 \end{cases}$$

を解いて，定常状態を求める．

$$\begin{cases} (1-p)w_2 + (1-p)w_3 = w_1 \\ 0.5w_1 + pw_3 = w_2 \\ w_1 + w_2 + w_3 = 1 \end{cases}$$

を解くと，

$$\begin{cases} w_1 = \dfrac{1-p^2}{2+p-p^2} = \dfrac{1-p}{2-p} \\ w_2 = \dfrac{0.5}{2-p} \\ w_3 = \dfrac{0.5}{2-p} \end{cases}$$

となる．従って，

$$P(A) = \frac{0.5(1-p)}{2-p} + \frac{(1-p)\cdot 0.5}{2-p} + \frac{p\cdot 0.5}{2-p} = \frac{1-0.5p}{2-p} = 0.5$$
$$P(B) = 0.5$$

ゆえに， $H_1(S) = \mathscr{H}(1) = 1$

また，

$$H(S) = \frac{1-p}{2-p} + \frac{0.5}{2-p}\mathscr{H}(p) + \frac{0.5}{2-p}\mathscr{H}(p) = \frac{1-p}{2-p} + \frac{\mathscr{H}(p)}{2-p}$$

設問３：$H(S)$の最大値を与える p の値の計算：

$$\frac{dH(S)}{dp} = \frac{d}{dp}\left(\frac{1-p}{2-p} + \frac{\mathscr{H}(p)}{2-p}\right) = -\frac{1}{(2-p)^2} + \frac{\mathscr{H}(p)}{(2-p)^2} + \frac{\frac{d}{dp}\mathscr{H}(p)}{2-p}$$

である．よく見ると，p =1/2 のとき，$dH(S)/dp$=0 であることがわかるのだが，計算で導いてみよう．
まず，

$$\begin{aligned} \frac{d}{dp}\mathscr{H}(p) &= -\frac{d}{dp}\left(p\log_2 p + (1-p)\log_2(1-p)\right) \\ &= -\frac{1}{\ln 2}\frac{d}{dp}\left(p\ln p + (1-p)\ln(1-p)\right) \\ &= -\frac{1}{\ln 2}(\ln p + 1 - \ln(1-p) - 1) = -\frac{1}{\ln 2}\ln\frac{p}{1-p} = \log_2\frac{1-p}{p} \end{aligned}$$

であるので，

$$\frac{dH(S)}{dp}=\frac{d}{dp}\left(\frac{1-p}{2-p}+\frac{\mathscr{H}(p)}{2-p}\right)=-\frac{1}{(2-p)^2}-\frac{p\log_2 p+(1-p)\log_2(1-p)}{(2-p)^2}+\frac{\log_2(1-p)-\log_2 p}{2-p}$$

$$=\frac{-1-p\log_2 p-(1-p)\log_2(1-p)+(2-p)\log_2(1-p)-(2-p)\log_2 p}{(2-p)^2}=\frac{\log_2\frac{1-p}{2p^2}}{(2-p)^2}$$

従って，

$$1-p=2p^2$$
$$(2p-1)(p+1)=0$$

より，p=1/2 のとき $dH(S)/dp$=0 になることがわかる．

p と $H(S)$の関係は次のようになる．