到達度確認問題：以下から，問題 1A/B/C/D から 1 題，問題 2, 問題 3A/B/C から 1 題の合計 3 題を解け.

問題 1A　長さ 1 の符号語 1 個，長さ 2 の符号語 4 個，長さ 3 の符号語 x 個，長さ 4 の符号語 y 個から構成される 3 元符号が一意復号可能であるための条件を x と y を用いた式で表し，可能な正数 x と y の組をすべて示せ．また，そのうちの一つについて，符号の具体例を示せ.

問題 1B　n 個の情報源記号 $\{A_1,\cdots,A_n\}$ をもつ無記憶情報源に対して，情報源記号を 1 つずつ，瞬時復号可能な 2 元符号に符号化することとする．また，符号 C の符号語を $\{c_1,\cdots,c_n\}$ としたとき，多重集合 $\{|c_1|,\cdots,|c_n|\}$ を C の符号長バッグと呼ぶことにする．さらに，n 個の情報源記号をもつ無記憶情報源に対して，情報源記号のさまざまな生起確率分布のもとで生じ得るすべてのコンパクト符号の符号長バッグの集合を $\mathscr{C}(n)$ と表記する．例えば，$n=2$ のときは，符号アルファベットを $\{0,1\}$ とすれば，コンパクト符号は $C=\{0,1\}$ しかなく，C の符号長バッグは $\{1,1\}$ であるので $\mathscr{C}(2)=\{\{1,1\}\}$ となる．$3\le n$ のときは，$\mathscr{C}(3)=\{\{1,2,2\}\}$，$\mathscr{C}(4)=\{\{1,2,3,3\},\{2,2,2,2\}\}$，…となる.

設問１　$\mathscr{C}(5)$，$\mathscr{C}(6)$，$\mathscr{C}(7)$ をそれぞれ求めよ.

設問２　無記憶情報源 S^* の各情報源記号 A^*_i　$(1\le i\le n)$ の生起確率が，ある正の数 p を用いて $P(A^*_i)=p^i$ と表わされるとしよう．このとき，次の問いに答えよ.

(1) $n=7$ として，S^* に対するコンパクト符号 C^* に対する符号長バッグはどうなるか？
(2) 一般の n について，C^* の平均符号長はどうなるか？
(3) 十分大きな n に対して C^* の平均符号長はどうなるか？

問題 1C　情報源記号 $\{a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6,a_7,a_8\}$ をもつ情報源 S に対して，1 情報源記号ごとに 2 元符号によるハフマン符号化を行った結果, 符号 $\{c(a_1),c(a_2),c(a_3),c(a_4),c(a_5),c(a_6),c(a_7),c(a_8)\}$ が得られ，$1\le|c(a_1)|\le|c(a_2)|\le|c(a_3)|\le|c(a_4)|\le|c(a_5)|=|c(a_6)|=|c(a_7)|=|c(a_8)|=5$ になったという．ただし，$c(a_i)$ は情報源記号 a_i に対する符号語，$|c(a_i)|$ は符号語 $c(a_i)$ の長さを表す.

このとき，$|c(a_1)|,|c(a_2)|,|c(a_3)|,|c(a_4)|$ の可能な組み合わせをすべて書き出せ．また，それぞれの組み合わせは，符号の木，および各符号に対応づけられる各情報源記号の生起確率がどのようになっている場合に生じるか，例示せよ.

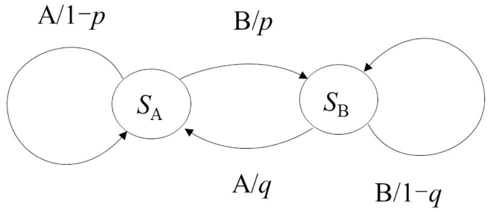
問題 1D　無記憶情報源 S の各情報源記号 A_i　$(1\le i\le n)$ の生起確率が，ある正の数 p を用いて $P(A_i)=p^i$ と表わされるとする．このとき，次の問いに答えよ．ただし，符号化には 2 元符号を用いるものとする.

(1) S に対するコンパクト符号 C に対する符号長バッグはどうなるか？ $n=5$ の場合について答えよ.
(2) 一般の n について，C の平均符号長を求めよ.
(3) 十分大きな n に対して C の平均符号長はどうなるか答えよ.

問題 2　$\{\mathrm{A},\mathrm{B}\}$ を情報源記号とし，その定常分布が $P(\mathrm{A})=\dfrac{1}{32}, P(\mathrm{B})=\dfrac{31}{32}$ の記憶のない情報源 S がある．次の問いに答えよ．ただし符号化には 2 元符号を用いるものとする.

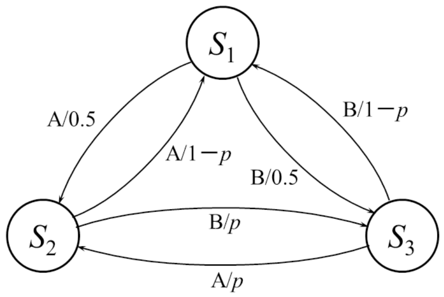
(1) 情報源 S の 2 次拡大情報源 S^2，3 次拡大情報源 S^3 に対するコンパクト符号とその 1 情報源記号あたりの平均符号長を示せ.
(2) 情報源 S の n 次拡大情報源 S^n に対するコンパクト符号の 1 情報源記号あたりの平均符号長を y とするとき，n の関数としての y の概形を，n を横軸，y を縦軸とするグラフで示せ.
(3) 情報源 S に対して，1 情報源記号あたりの平均符号長が 0.33 未満となる瞬時復号可能なブロック符号を構成せよ.

$\boxed{\text{問題 3A}}$　次のマルコフ情報源 S について次の問いに答えよ.



(1) S の定常分布を求めよ.
(2) S の 1 次エントロピー $H_1(S)$ と 2 次エントロピー $H_2(S)$ を求めよ.
(3) p を x 軸，q を y 軸，$H_1(S)$ を z 軸にとり，p，q，$H_1(S)$ の関係を図示せよ.
(4) n を横軸，S の n 次エントロピー $H_n(S)$ を縦軸として，n と $H_n(S)$ の関係をグラフで表せ.

$\boxed{\text{問題 3B}}$　下図のマルコフ情報源 S について以下の問いに答えよ.



$(0 \leq p \leq 1)$

$\boxed{\text{設問 1}}$　S が正規マルコフ情報源であるための，p に関する必要十分条件を示せ.
$\boxed{\text{設問 2}}$　S が正規マルコフ情報源であるとき，その 1 情報源記号あたりの 1 次エントロピー $H_1(S)$ とエントロピー $H(S)$ の値を求めよ．ただし，$H(S) = \lim_{n\to\infty} H_n(S)$ である.

$\boxed{\text{設問 3}}$　S が正規マルコフ情報源であるとき，p と $H(S)$ の関係を，p を横軸，$H(S)$ を縦軸とする 2 次元平面上に表せ．また，$H(S)$ の値を最大化する p の値を示せ.

$\boxed{\text{問題 3C}}$　次の遷移確率行列 T で表わされたマルコフ情報源 S がある.

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & p & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}-p & 0 \\ \frac{1}{2}-p & 0 & \frac{1}{2} & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ p & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}-p \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{ただし，} 0 < p < \tfrac{1}{2}$$

ここで, i 番目の状態 S_i に遷移するとき情報源記号 A_i $(A_i \neq A_j \text{ if } i \neq j)$ が生成されるものとする. また, p は $\frac{1}{2}$ に十分近いとする.

$\boxed{\text{設問 1}}$　S が正規マルコフ情報源であることを示せ.
$\boxed{\text{設問 2}}$　S の挙動を定性的に述べよ.
$\boxed{\text{設問 3}}$　十分大きな n に対して，T^n の値を概算せよ.
$\boxed{\text{設問 4}}$　S の 1 次エントロピー $H_1(S)$，1 情報源記号あたりの 2 次エントロピー $H_2(S)$，1 情報源記号あたりの n 次エントロピー $H_n(S)$ の値を概算せよ.
$\boxed{\text{設問 5}}$　S の 1 情報源記号あたりのエントロピー $H(S)$ の値を概算せよ. ただし，$H(S) = \lim_{n\to\infty} H_n(S)$ である.