1.5 相互情報量の概念

今度は，知りたいことについての直接的な答えが得られない場合について考えてみよう．前の例と同様に，自分の友人が街の中の分かれ道で左か右のどちらに行ったかわからなくなってしまったとする．また，左の道から来た人に「日本人を見かけませんでしたか？」という質問をすることはできるが，その質問に対する答えは必ずしも正確ではないとする．この場合，全事象は，友人が左右のいずれに行ったか，左から来た人が見かけたと言うか否かの 4 つのケースから構成される．さらに，

- 友人が実際に左に行った場合，左の道から来た人に「日本人を見かけませんでしたか？」と尋ねると，（そんなに注意していたわけではないなどの理由で）「見ていない」と答える割合は全体の 20%，「見かけた」と答える割合は全体の 30%である．
- 友人が右に行ったとする．左の道から来た人が「日本人を見ていない」と答える割合は全体の 40%，（ほかの日本人を見たなどの理由で）「見かけた」と答える割合は全体の 30%である．

とする．

	左	右
見逃	20%	40%
目撃	30%	10%

上に述べた状況について検討するための前提は，結合確率を用いて次のように記述できる．

$$P(\text{左},\text{「見てない」}) = 0.2, P(\text{左},\text{「見た」}) = 0.3$$

$$P(\text{右},\text{「見てない」}) = 0.4, P(\text{右},\text{「見た」}) = 0.1$$

ここで，$P(\text{左},\text{「見てない」}) = 0.2$ は友人が左に行き，かつ，左から来た人が「見てない」と報告する確率が 0.2 であることを示している．他も同様．

上記の確率モデルからいろいろな確率が導ける．そもそも，友人が左に行った確率，右に行った確率はそれぞれ，

$$P(\text{左}) = P(\text{左},\text{「見てない」}) + P(\text{左},\text{「見た」}) = 0.2 + 0.3 = 0.5$$

$$P(\text{右}) = P(\text{右},\text{「見てない」}) + P(\text{右},\text{「見た」}) = 0.4 + 0.1 = 0.5$$

である．一方，左から来た人が「見てない」と言うか，「見た」と言うかについては，

$$P(\text{「見てない」}) = P(\text{左},\text{「見てない」}) + P(\text{右},\text{「見てない」}) = 0.2 + 0.4 = 0.6$$

$$P(\text{「見た」}) = P(\text{左},\text{「見た」}) + P(\text{右},\text{「見た」}) = 0.3 + 0.1 = 0.4$$

となる．さらに，「見てない」という答えを得たという条件下で，友人が右に行ったか，左に行ったかについては，

$$P(\text{左}\,|\,\text{「見てない」}) = \frac{P(\text{左},\text{「見てない」})}{P(\text{左},\text{「見てない」}) + P(\text{右},\text{「見てない」})} = \frac{0.2}{0.2+0.4} = \frac{1}{3}$$

$$P(\text{右}\,|\,\text{「見てない」}) = \frac{P(\text{右},\text{「見てない」})}{P(\text{左},\text{「見てない」}) + P(\text{右},\text{「見てない」})} = \frac{0.4}{0.2+0.4} = \frac{2}{3}$$

であることが，結合確率モデルから導ける．同様に，

$$P(\text{左}\,|\,\text{「見た」}) = \frac{P(\text{左},\text{「見た」})}{P(\text{左},\text{「見た」}) + P(\text{右},\text{「見た」})} = \frac{0.3}{0.3+0.1} == \frac{3}{4}$$

$$P(\text{右}\,|\,\text{「見た」}) = \frac{P(\text{右},\text{「見た」})}{P(\text{左},\text{「見た」}) + P(\text{右},\text{「見た」})} = \frac{0.1}{0.3+0.1} == \frac{1}{4}$$

である．一方，左右のいずれに行ったかがわかった場合については，

$$P(\text{「見てない」 左}) = \frac{P(\text{左},\text{「見てない」})}{P(\text{左},\text{「見てない」}) + P(\text{左},\text{「見た」})} = \frac{0.2}{0.2+0.3} == \frac{2}{5}$$

$$P(\text{「見た」}\,|\,\text{左}) = \frac{P(\text{左},\text{「見た」})}{P(\text{左},\text{「見てない」}) + P(\text{左},\text{「見た」})} = \frac{0.3}{0.2+0.3} == \frac{3}{5}$$

$$P(\text{「見てない」}\,|\,\text{右}) = \frac{P(\text{右},\text{「見てない」})}{P(\text{右},\text{「見てない」}) + P(\text{右},\text{「見た」})} = \frac{0.4}{0.4+0.1} == \frac{4}{5}$$

$$P(\text{「見た」}\,|\,\text{右}) = \frac{P(\text{右},\text{「見た」})}{P(\text{右},\text{「見てない」}) + P(\text{右},\text{「見た」})} = \frac{0.1}{0.4+0.1} == \frac{1}{5}$$

となる．

この状況で，「日本人を見かけましたか？」という問いに対する必ずしも正確ではない回答を得ることで，どれくらいのゲインがあると思えばいいだろうか？

この問いに答えるために，次の 2 つの量を計算してみよう．第一は，左から来た人から何も教えてもらっていない状況で，友人が左右どちらに行ったかを教えてもらったときに得る平均情報量．第二は，左から来た人から「見た」か「見てない」かを教えてもらったあとで，友人が左右どちらに行ったかを教えてもらったときに得る情報量．

第一の場合は，「左に行った」というメッセージがもたらす情報量は，

$$\log_2 \frac{1}{P(\text{左})} = 1 \quad \text{ビット}$$

である．同様に，「右に行った」というメッセージのもたらす情報量も 1 ビットであり，左に行ったか右に行ったかという問いに対するメッセージからは，平均すると 1 ビットの情報量が期待される．

第二の目撃したか否かについて教えてもらった場合については次のようになる．「見てない」という報告を受けたとすれば，左に行った確率は $\frac{1}{3}$，右に行った確率は $\frac{2}{3}$ であるので，左に行ったか右に行ったかという問いに対するメッセージからは，平均すると

$$\frac{1}{3}\log_2\frac{1}{\frac{1}{3}}+\frac{2}{3}\log_2\frac{1}{\frac{2}{3}}\approx 0.918 \quad \text{ビット}$$

の情報量が期待される．一方，「見た」という報告を受けたとすれば，友人が左に行った確率は $\frac{3}{4}$，右に行った確率は $\frac{1}{4}$ であるので，左に行ったか右に行ったかという問いに対するメッセージからは，平均すると

$$\frac{3}{4}\log_2\frac{1}{\frac{3}{4}}+\frac{1}{4}\log_2\frac{1}{\frac{1}{4}}\approx 0.811 \quad \text{ビット}$$

の情報が得られる．そもそも「見てない」という報告が生じる確率は $\frac{3}{5}$，「見た」という報告が生じる確率は $\frac{2}{5}$ であるので，左に行ったか右に行ったかという問いに対するメッセージから期待される情報量をその割合で平均すると，

$$\frac{3}{5}\times 0.918+\frac{2}{5}\times 0.811\approx 0.8755 \quad \text{ビット}$$

となる．

左から来た人から何も教えてもらわなかったときに友人が左右どちらに行ったかというメッセージから期待される情報量は 1 ビットであったから，「見た」か「見てない」かを教えてもらうことで，友人が左右どちらに行ったかというメッセージによって平均的に得られる情報量は，

$$1-0.8755=0.1245 \quad \text{ビット}$$

ほど減ったことになる．これがまさに，「日本人を見かけましたか？」という問いに対する正確さが保証されていない回答が，平均的にもたらす情報量である．

換言すると，友人が左右のどちらに行ったかというメッセージを発生する情報源は，当初は 1 ビットの不確かさをもっていたが，「日本人を見かけましたか？」という問いに対する回答が得られるとたとえそれが正確でなくても，平均的に約 0.8755 ビットの不確かさに減少する．そして，減少した 0.1245 ビットは，まさしく「日本人を見かけましたか？」という問いに対する回答の情報量である．

問い　友人が左右のいずれに行ったかを伝えてくれるメッセージが，日本人を目撃したか否かについての不確かさを平均的にどれだけ減らすか，算出せよ．

問い　P(左,「見てない」), P(左,「見た」), P(右,「見てない」), P(右,「見た」) の値を変えたとき，日本人を見かけたか否かというメッセージがもつ情報量はどう変化するか？