6.1 記憶のある情報源のモデル化の例

まず，記憶のある情報源のモデル化をどのように行うか，例題を用いて説明する．

【例題】{直球，変化球}を投げ分けられる投手がいたとしよう．どの球種も同じく 1/2 の確率で投げてくることがわかっていたとすると，次に来るボールがどれであるかは等しく予想しがたいが，直球，変化球と続いた後に必ずと言っていいくらい，変化球を投げるという癖があるとわかっていると，直球，変化球の後には変化球に山を張ればよいということになる．

この投手を各時刻で{直球，変化球}の球種を発生する情報源としてモデル化したとき，先行する投球内容を考慮に入れない場合が無記憶情報源モデル，考慮に入れる場合が記憶のある情報源モデルとなる．

この投手の行動の確率論に基づくモデル化をしてみよう．投球するのは時刻 0, 1, 2, …とする. 時刻 t の投球を確率変数 X_t で表す. 普通の変数とは異なり, 確率変数 $\{X_0, X_1, X_2, \cdots\}$ の値は定められた確率により試行（この例では「試合」に相当するとでも思っておけばよい）ごとに決まるものとして定式化されている．試行は第 1 回，第 2 回，…と繰り返されていく．その都度，確率変数の値が決まる．例えば，第 1 回目の試行では，X_0 の値は直球，X_1 の値は直球，… ; 試行 2 では，X_0 の値は変化球，X_1 の値は直球，… ; と続くイメージだ．概して，たくさんの回数の試行を行うと，各確率変数の値を決める確率が浮き上がってくる．

確率変数を用いた議論をするときは，こうした試行を引き起こす原因となる確率モデルを想定し，次の 1 回の 試行を考察の対象とする．

記憶のない情報源モデルを使うならば，各試行において各回の投球は独立に決まるものとみなされる．投手の行動は，

直球を投げる確率＝0.42
変化球を投げる確率＝0.58

といった具合にモデル化される．これに従って次の試行が行われ，その結果，

X_0 の値は変化球，X_1 の値は直球，…

というように，その試行における確率変数の値が決まる．

これに対して，記憶のある情報源モデルを使う場合は，各回の球種の確率は，先行する（あらかじめ定められた回数，例えば 3 回の）有限回の投球内容，あるいは，投手の「心の状態」（技術的には内部状態という）によって決まるものとしてモデル化が行われる．後で示すように，次の球種が（有限個の）内部状態によって決まるというモデル化（一般マルコフモデルによるモデル化）は，次の球種の確率が先行する投球内容で決まるというモデル化（多重マルコフモデルによるモデル化）より強力であり，より複雑な球種確率の決定法を記述できる．

まず，次の球種が先行する有限回の投球内容によって決まる，というケースのモデル化を示そう．例えば，「直球，変化球の後には，確率 0.8 で変化球が投げられる」といったモデル化を行う．これを例えば

$$P_{X_{17}|X_{15},X_{16}}(\text{変}\,|\,\text{直},\text{変}) = 0.8$$

と記述する．これは，与えられた試行において，確率変数 X_{15} の値が「直」（直球を表す），確率変数 X_{16} の値が「変」（変化球を表す）となったとき，確率変数 X_{17} の値が変化球にな

る確率が 0.8 であると言っている．｜は条件付き確率であることを示し，その右側に並べられた確率変数の値が決まった場合に，｜の左側に置かれた確率変数の確率を問題にすることを示唆している．また，｜の右側の確率変数の並べ方は時刻順としている（ここは，教科書と逆になっている）．

さて，上では陽に述べてこなかったが，X_i の i は$-\infty$，ないしは，0 あるいは 1 から始まり，果てしなく続くものとして抽象化している．また，さも当たり前のように，「直球，変化球の後に，変化球が投げられる確率はいつでも同じ」であるかのように，つまり，

$$
\begin{aligned}
&\cdots \\
&= P_{X_{16}|X_{14},X_{15}}(\text{変}\,|\,\text{直},\text{変}) \\
&= P_{X_{17}|X_{15},X_{16}}(\text{変}\,|\,\text{直},\text{変}) \\
&= P_{X_{18}|X_{16},X_{17}}(\text{変}\,|\,\text{直},\text{変}) \\
&\cdots \\
&= 0.8
\end{aligned}
$$

としたがそうでないこともあるかもしれない．「直球，変化球の後に，変化球が投げられる確率はいつでも同じ」というのは（実際はそうでないかもしれないが，単純化によって問題を考えやすくするために導入した）一つの仮定である．このような仮定が導入された情報源を定常情報源という．定常情報源は，必ずしも記憶のない情報源を意味しないので注意しよう．上の例にあるように，「…がいつも同じ」の部分が定常に相当する．「直球，変化球の後に」のところが「記憶のある」に相当する．

定常情報源であるという仮定を導入したとたん，情報源を完全に記述することが容易になる．所与の情報源が定常情報源であり，

$$P_{X_2|X_0,X_1}(\text{変}\,|\,\text{直},\text{変}) = 0.8$$

であるとモデルに記述したとたん，それはすべての i について

$$P_{X_{i+2}|X_i,X_{i+1}}(\text{変}\,|\,\text{直},\text{変}) = 0.8$$

であることを宣言したことになる．仮に，その投手の投球する球種の確率をその前に 2 回投球した内容に従って決定されるというモデルを採用したとすると，上と同様に，

$$P_{X_2|X_0,X_1}(x_2\,|\,x_0,x_1) = 0.8$$

の値を x_0, x_1, x_2 の取りえるすべての値の組み合わせ, 2^3=8 通り与えればこのモデルの核心部分を定めたことになる．

一般に，X_n の値の出現確率が，先行する m 個の連続する確率変数 $X_{n\text{-}1}, X_{n\text{-}2}, \ldots, X_{n\text{-}m}$ がどう具体化されたかに依存して決まるものと規定した確率モデルを m 重マルコフモデルという．

ここで取り上げている例題については，例えば，次のように規定されることになる．

情報源記号{直球,変化球}に対する条件確率 $P(x_2|x_0,x_1)$の例

x_0	x_1	x_2	$P(x_2\|x_0,x_1)$
直	直	直	0.6
直	直	変	0.4
直	変	直	0.2
直	変	変	0.8
変	直	直	0.5
変	直	変	0.5
変	変	直	0.6
変	変	変	0.4

m 重マルコフモデルを完全に規定するためにはもう少し情報を与える必要がある. 上記のように条件付き確率を与えただけではこの投手の繰り出す投球の確率過程を完全に規定できないからである．例えば，上に与えた情報だけからは，$P_{X_{10}}(\text{変})$ の値がどうなるか計算できない．m 重マルコフモデルの場合，確率過程を完全に規定するためには，さらに $P_{X_0}(x_0)$，$P_{X_1|X_0}(x_1 \mid x_0)$，⋯，$P_{X_m|X_0,\cdots,X_{m-1}}(x_m \mid x_0,\cdots,x_{m-1})$ を規定するか，結合確率：

$$P_{X_0,\cdots,X_{m-1},X_m}(x_0,\cdots,x_{m-1},x_m)$$

を X_i の可能な具体化である x_i の取りえるすべての値について規定しなければならない.

情報源記号{直球,変化球}に対する結合確率 $P(x_0,x_1,x_2)$の例

x_0	x_1	x_2	$P(x_0, x_1, x_2)$
直	直	直	0.168
直	直	変	0.112
直	変	直	0.024
直	変	変	0.096
変	直	直	0.24
変	直	変	0.24
変	変	直	0.072
変	変	変	0.048

上のように結合確率を与えると，この 2 重マルコフ情報源の性質を完全に与えたことになる．このモデルが所与の投手の妥当なモデルとすれば，この投手が直球，変化球のあとに変化球を投げる確率は，0.8 であることになる.

上において $P_{X_0,X_1,X_2}(x_0,x_1,x_2)$ の値を 8 個指定したが，それらの合計は 1 でなければならないので，実質的に指定した値は 7 個である．これに対して，先に規定した条件付き確率による指定では，$P_{X_2|X_0,X_1}(直|x_0,x_1)+P_{X_2|X_0,X_1}(直|x_0,x_1)=1$ でなければならないので，実質的に指定した値は 4 個である．この場合はマルコフ情報源の性質を完全に規定するためには，さらに，3 つの確率：$P_{X_0}(\cdot), P_{X_1|X_0}(\cdot|直), P_{X_1|X_0}(\cdot|変)$（ここで，・は直か変のいずれか一方）を指定する必要があるので，結局，結合確率の場合と同じく実質的に 7 個の値を指定する必要がある．

ここからいろいろな確率を計算することができる．

$$
\begin{aligned}
&P_{X_2|X_0,X_1}(変|直,変)\\
&\quad=\frac{P_{X_0,X_1,X_2}(直,変,変)}{P_{X_0,X_1}(直,変)}\\
&\quad=\frac{P_{X_0X_1,X_2}(直,変,変)}{P_{X_0X_1,X_2}(直,変,変)+P_{X_0X_1,X_2}(直,変,直)}\\
&\quad=\frac{0.096}{0.024+0.096}=0.8
\end{aligned}
$$

1 球目，2 球目，3 球目が変化球である確率はそれぞれ，

$$
\begin{aligned}
P_{X_0}(変)&=\sum_{x_2}\sum_{x_1}P_{X_0X_1X_2}(変,x_1,x_2)\\
&=P_{X_0X_1X_2}(変,直,直)+P_{X_0X_1X_2}(変,直,変)\\
&\qquad+P_{X_0X_1X_2}(変,変,直)+P_{X_0X_1X_2}(変,変,変)\\
&=0.24+0.24+0.072+0.048=0.6\\
P_{X_1}(変)&=\sum_{x_2}\sum_{x_1}P_{X_0X_1X_2}(x_0,変,x_2)\\
&=P_{X_0X_1X_2}(直,変,直)+P_{X_0X_1X_2}(直,変,変)\\
&\qquad+P_{X_0X_1X_2}(変,変,直)+P_{X_0X_1X_2}(変,変,変)\\
&=0.024+0.096+0.072+0.048=0.24\\
P_{X_2}(変)&=\sum_{x_2}\sum_{x_1}P_{X_0X_1X_2}(x_0,x_1,変)\\
&=P_{X_0X_1X_2}(直,直,変)+P_{X_0X_1X_2}(直,変,変)\\
&\qquad+P_{X_0X_1X_2}(変,直,変)+P_{X_0X_1X_2}(変,変,変)\\
&=0.112+0.096+0.24+0.048=0.496
\end{aligned}
$$

上記の値は，先行する球種のパターンを押しなべて計算した値である．3 球目以降からは，先行する球種を考慮に入れた予測が可能であり，場合によってはより，予測しやすくなることがある．たとえば，1 球目直球，2 球目変化球であったという前提の下では，第 3 球目が変化球である確率は，　$P_{X_2|X_0,X_1}(変|直,変)=0.8$ となり，さらに，第 3 球目が変化球で

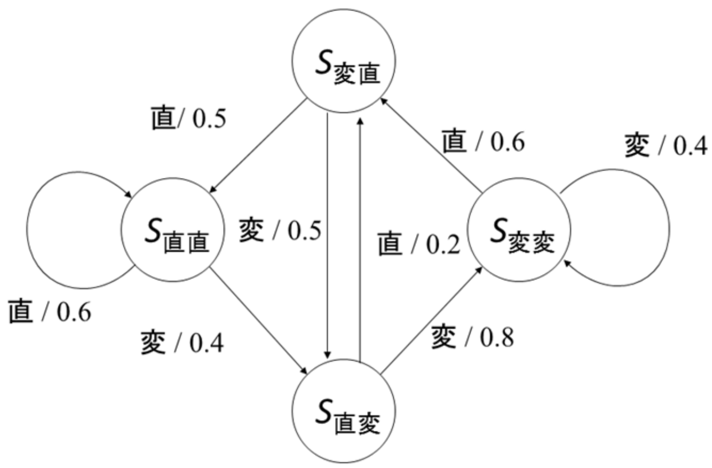
あった場合は，次の球が変化球である確率は，

$$P_{X_3|X_1X_2}(\text{変}\,|\,\text{変},\text{変})$$
$$= P_{X_2|X_0X_1}(\text{変}\,|\,\text{変},\text{変}) = \frac{0.048}{0.048+0.072} = 0.4$$

となる（最後のステップでは定常性も利用している．）

今度は内部状態に基づく方法について紹介する．この方法では（有限個の）設けられている．投手は各時刻で$\{S_1,\cdots,S_n\}$のうちの一つの内部状態（いわば「心の状態」）にあり，状態ごとに定められた確率で投球球種と次の時点の心の状態が決められる．内部状態は，心の状態は顔色や表情・しぐさを通した外部から推測できるかもしれないし，そうでないかもしれない．今取り上げている例題でどのような内部状態を設けたらいいだろうか？

もし投手が直前とその前の時刻に投げた球種で次の球種の確率を変えているとしたら，直前とその前の時刻に投げた球種をそのまま内部状態として採用することができる．このアイデアによると，先に示した条件付き確率を用いた 2 重マルコフモデルは，先行する 2 球が直球-直球，直球-変化球，変化球-直球，変化球-変化球の場合に相当する 4 状態を設ければよい．そしてその間に状態遷移規則を導入する．



例えば,「直球, 変化球の次に, 確率 0.8 で変化球が投げられる」という部分に対応して，$S_{直,変}$から確率 0.8 で「変化球」が投げられ，その結果，先行する 2 つの投球内容が変化球，変化球である状態にそうとする状態$S_{変,変}$に遷移する．