6.2 記憶のある情報源モデル

次に，例題で用いたいくつかの概念の定式化を行う．定常情報源概念を与えた後，記憶の有無に応じた情報源記号の発生確率の算出法を与える．さらに，記憶のある情報源をモデル化する手法である，m 重マルコフ情報源と，一般化されたマルコフ情報源を導入する．

(1) 定常情報源の概念の導入

情報源記号 $A=\{a_1, a_2, \ldots, a_M\}$をもつ情報源 S に対して，時間の経過に伴う S からの出力を $X_0,\ldots,X_{n\text{-}1}$ と表す（X_i は$\{a_1, a_2, \ldots, a_M\}$のどれかをとり得る確率変数）.

定常情報源：各時点における情報源記号の発生が同一の確率分布に従う．時間をずらしても統計的性質は変わらない．つまり，任意の正整数 n と i，情報源記号の任意の元 $x_0, x_1, \cdots, x_{n-1}$ に対して，

$$P_{X_0,X_1,\cdots,X_{n-1}}(x_0,x_1,\cdots,x_{n-1}) = P_{X_i,X_{i+1},\cdots,X_{i+n-1}}(x_0,x_1,\cdots,x_{n-1})$$

$\cdots$ $X_0 = x_0, X_1 = x_1, \cdots, X_{n-1} = x_{n-1}$ となる確率と $X_i = x_0, X_{i+1} = x_1, \cdots, X_{i+n-1} = x_{n-1}$ となる確率が等しい

次に，記憶の有無に応じて情報源記号の発生確率の算出法を与える．

(a) 記憶のない定常情報源

記憶のない定常情報源の出力の結合確率分布は，各時点における情報源記号の発生が，他の時点とは独立である．

$$P_{X_0,\cdots,X_{n-1}}(x_0,\cdots,x_{n-1}) = \prod_{i=0}^{n-1} P_{X_i}(x_i)$$

(b) 記憶のある定常情報源モデル

$X_0,\ldots,X_{n\text{-}1}$ の統計的性質は，結合確率分布：

$$P_{X_0,\cdots,X_{n-1}}(x_0,\cdots,x_{n-1}) = [X_0 = x_0, X_1 = x_1, \cdots, X_{n-1} = x_{n-1}\text{となる確率}]$$

を与えれば完全に規定することができる．

結合確率として明示的に与えられていない確率はベイズの原理で求める．例えば，

$$P(x_2 \mid x_0, x_1) = \frac{P(x_0,x_1,x_2)}{P(x_0,x_1)} = \frac{P(x_0,x_1,x_2)}{P(x_0,x_1,\mathrm{A}) + P(x_0,x_1,\mathrm{B})}$$

(2) マルコフ情報源

記憶のある情報源で最も基本的なモデルである． $m \le n$ なる全ての n に対して，

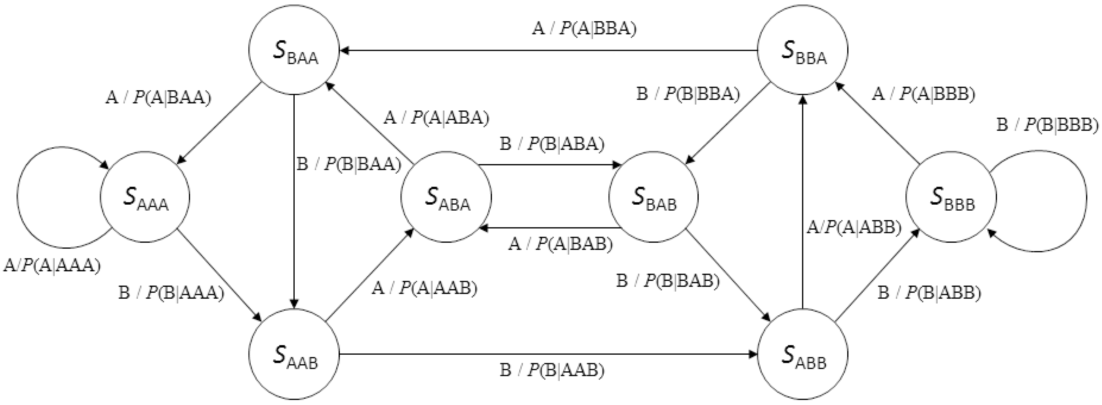
$$P_{X_i|X_{i-1},\cdots,X_{i-n}}(x_i \mid x_{i-1},\cdots,x_{i-n}) = P_{X_i|X_{i-1},\cdots,Xi-m}(x_i \mid x_{i-1},\cdots,x_{i-m})$$

が成り立つとき，m 重マルコフ情報源と呼ばれる．先行する m 個の出力を記憶し，それに基づいて次に出力する情報源アルファベットの生起確率が決まる．

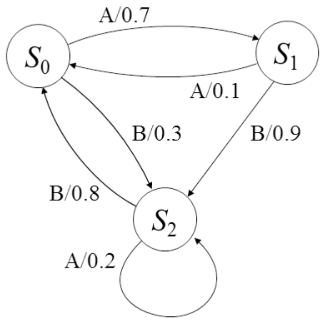
(3) 一般化されたマルコフ情報源

状態図によって規定される. m 重マルコフ情報源は一般化されたマルコフ情報源としてモデル化できる．

2 元{A, B}の 3 重マルコフ情報源に対する状態図は一般に次のようになる．



一方，一般化されたマルコフ情報源は必ずしも m 重マルコフ情報源としてモデル化できない．次の例を見てみよう．



直前に A だけからなる出力系列が続く場合，$S_0 \Leftrightarrow S_1$ によるものか，$S_2 \Leftrightarrow S_2$ によるものか区別できないからだ．換言すれば，$P(\mathrm{A}|\mathrm{A}\cdots\mathrm{A})$が$\{0.7, 0.1, 0.2\}$のいずれであるか，決めるすべがない．