

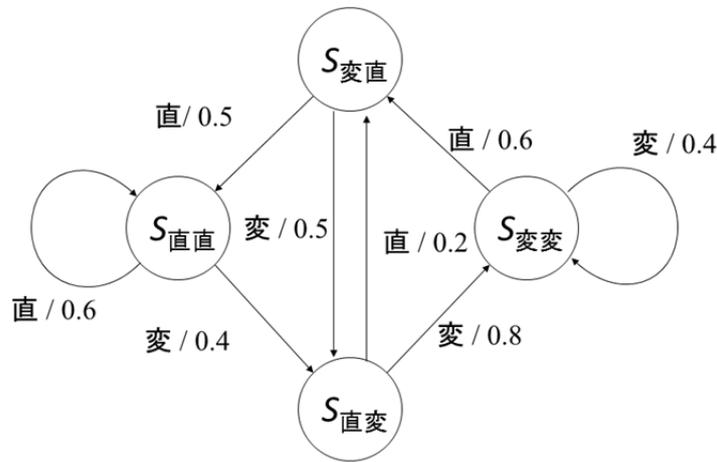
6.5 マルコフ情報源の遷移確率行列表現

状態 s_i の次に状態 s_j に移る確率 $p_{ij}=P(s_j|s_i)$ を遷移確率と呼ぶ. N 個の状態 $s_0 \sim s_{N-1}$ に対して遷移確率を定義し, $N \times N$ の正方行列として表したもの:

$$\Pi = \begin{bmatrix} p_{0,0} & \cdots & p_{0,N-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{N-1,0} & \cdots & p_{N-1,N-1} \end{bmatrix}$$

を遷移確率行列と呼ぶ.

【例】 投球の2重マルコフモデルから構成された一般化マルコフ情報源モデル:



については, 遷移確率行列は次のようになる.

$$\Pi = \begin{bmatrix} P_{直直,直直} & P_{直直,直変} & P_{直直,変直} & P_{直直,変変} \\ P_{直変,直直} & P_{直変,直変} & P_{直変,変直} & P_{直変,変変} \\ P_{変直,直直} & P_{変直,直変} & P_{変直,変直} & P_{変直,変変} \\ P_{変変,直直} & P_{変変,直変} & P_{変変,変直} & P_{変変,変変} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2 & 0.8 \\ 0.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.6 & 0.4 \end{bmatrix}$$

(2) $p_{ij}^{(t)}$: ちょうど t 回目の遷移で s_i から s_j に至る確率とすれば,

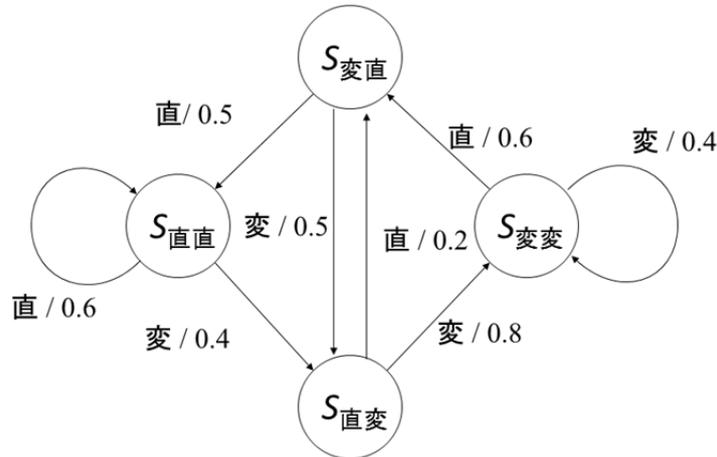
$$p_{ij}^{(1)} = p_{ij}$$

$$p_{ij}^{(t)} = \sum_{k=0}^{N-1} p_{ik}^{(t-1)} p_{kj}$$

$p_{ij}^{(t)}$ で構成される行列 $\Pi^{(t)}$ の ij 要素は, 遷移確率行列を t 乗して得られる行列の ij 要素に等しい. つまり,

$$\Pi^{(t)} = \begin{bmatrix} p_{0,0}^{(t)} & \cdots & p_{0,N-1}^{(t)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{N-1,0}^{(t)} & \cdots & p_{N-1,N-1}^{(t)} \end{bmatrix} = \Pi^t$$

となる。
例えば、



の場合、ちょうど3回の遷移で状態 $S_{\text{変直}}$ から状態 $S_{\text{直直}}$ に遷移するのは、 $S_{\text{変直}} \rightarrow S_{\text{直直}} \rightarrow S_{\text{直直}} \rightarrow S_{\text{直直}}$ という遷移と $S_{\text{変直}} \rightarrow S_{\text{直変}} \rightarrow S_{\text{変直}} \rightarrow S_{\text{直直}}$ という遷移だけである。これに対応して、

$$\begin{aligned} p_{\text{変直}, \text{直直}}^{(3)} &= p_{\text{変直}, \text{直直}}^{(2)} \cdot p_{\text{直直}, \text{直直}} + p_{\text{変直}, \text{直変}}^{(2)} \cdot p_{\text{直変}, \text{直直}} \\ &= p_{\text{変直}, \text{直直}}^{(1)} \cdot p_{\text{直直}, \text{直直}} \cdot p_{\text{直直}, \text{直直}} \\ &\quad + p_{\text{変直}, \text{直変}}^{(1)} \cdot p_{\text{直変}, \text{直変}} \cdot p_{\text{直変}, \text{直直}} \\ &= 0.5 \times 0.6 \times 0.4 + 0.5 \times 0.2 \times 0.5 = 0.17 \end{aligned}$$

一方、行列演算では、

$$\Pi^3 = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2 & 0.8 \\ 0.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.6 & 0.4 \end{bmatrix}^3 = \begin{bmatrix} 0.256 & 0.184 & 0.24 & 0.32 \\ 0.3 & 0.28 & 0.212 & 0.208 \\ 0.23 & 0.17 & 0.28 & 0.32 \\ 0.3 & 0.24 & 0.156 & 0.304 \end{bmatrix}$$

となる。この行列の3行2列の要素が $p_{\text{変直}, \text{直直}}^{(3)}$ を表している。