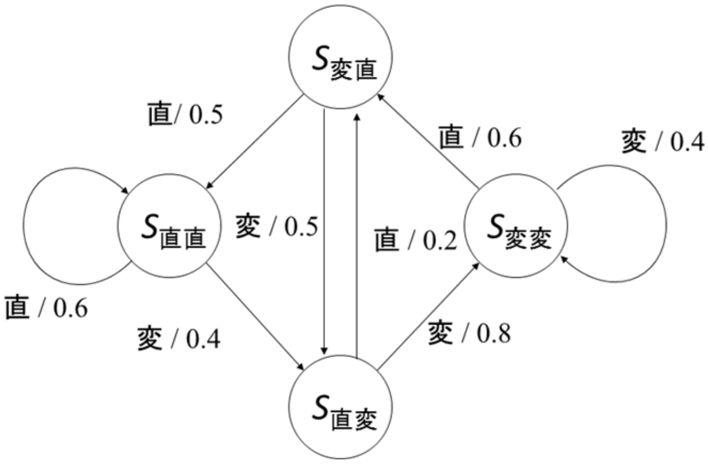
6.6 正規マルコフ情報源の漸近的な性質

正規マルコフ情報源は十分な時間が経過した後は，どの状態からどの状態へも遷移し得る．換言すれば，正規マルコフ情報源に対する遷移確率行列を

$$\Pi = \begin{bmatrix} p_{0,0} & \cdots & p_{0,N-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{N-1,0} & \cdots & p_{N-1,N-1} \end{bmatrix}$$

とすれば，ある t_0 が存在し，任意の $t \geqq t_0, i, j > 0$ に対して，　$p_{ij}^{(t_0)} > 0$ となる．

【例】投球の 2 重マルコフモデルから構成された一般化マルコフ情報源モデル:



ちょっと調べてみればわかるが，2 回以上の遷移でどの状態からどの状態にも到達し得る．実際，

$$\Pi^2 = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2 & 0.8 \\ 0.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.6 & 0.4 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 0.36 & 0.24 & 0.08 & 0.32 \\ 0.1 & 0.1 & 0.48 & 0.32 \\ 0.3 & 0.2 & 0.1 & 0.4 \\ 0.3 & 0.3 & 0.24 & 0.16 \end{bmatrix}$$

となっている．

正規マルコフ情報源では，$t \to \infty$ のとき，$p_{ij}^{(t)}$ は i に無関係な値に収束する．すなわち，

$$\lim_{t \to \infty} P_{ij}^{(t)} = u_j$$

つまり，

$$\lim_{t\to\infty}\Pi^t = U = \begin{bmatrix} u_0 & \cdots & u_{N-1} \\ \vdots & & \vdots \\ u_0 & \cdots & u_{N-1} \end{bmatrix}$$

となる.

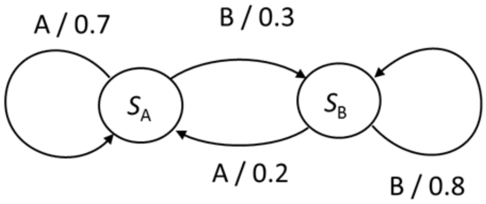
【例】いま,

$$\Pi = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2 & 0.8 \\ 0.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.6 & 0.4 \end{bmatrix}$$

とすると, Π^n は次のようになる.

```
In[6]:= MatrixForm[p]

Out[6]//MatrixForm=
0.6  0.4  0    0
0    0    0.2  0.8
0.5  0.5  0    0
0    0    0.6  0.4

In[13]:= MatrixForm[p.p.p.p.p]

Out[13]//MatrixForm=
0.27856  0.22384  0.2096   0.288
0.262    0.2048   0.22952  0.30368
0.2798   0.2242   0.2048   0.2912
0.27     0.2184   0.22776  0.28384

In[14]:= MatrixForm[p.p.p.p.p.p]

Out[14]//MatrixForm=
0.271936  0.216224  0.217568  0.294272
0.27196   0.21956   0.223168  0.285312
0.27028   0.21432   0.21956   0.29584
0.27588   0.22188   0.213984  0.288256

In[16]:= MatrixForm[p.p.p.p.p.p.p.p.p.p.p.p.p.p.p]

Out[16]//MatrixForm=
0.272728  0.218183  0.218181  0.290908
0.272726  0.218179  0.218182  0.290913
0.272729  0.218184  0.218179  0.290908
0.272726  0.218181  0.218185  0.290909
```

もうひとつ例を挙げておこう．次のマルコフ情報源



については，

$$\Pi = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.2 & 0.8 \end{pmatrix},\ \Pi^2 = \begin{pmatrix} 0.55 & 0.45 \\ 0.3 & 0.7 \end{pmatrix},$$

$$\Pi^3 = \begin{pmatrix} 0.475 & 0.525 \\ 0.35 & 0.65 \end{pmatrix},\ \Pi^4 = \begin{pmatrix} 0.4375 & 0.5625 \\ 0.375 & 0.625 \end{pmatrix}$$

$$\Pi^5 = \begin{pmatrix} 0.41875 & 0.58125 \\ 0.3875 & 0.6125 \end{pmatrix},$$

$$\Pi^6 = \begin{pmatrix} 0.409375 & 0.590625 \\ 0.39375 & 0.60625 \end{pmatrix},$$

$$\Pi^7 = \begin{pmatrix} 0.404688 & 0.595313 \\ 0.396875 & 0.603125 \end{pmatrix},$$

$$\Pi^8 = \begin{pmatrix} 0.402344 & 0.597656 \\ 0.38438 & 0.601563 \end{pmatrix},$$

$$\Pi^9 = \begin{pmatrix} 0.401172 & 0.598828 \\ 0.399219 & 0.600781 \end{pmatrix},$$

$$\Pi^{10} = \begin{pmatrix} 0.400586 & 0.599414 \\ 0.399609 & 0.600391 \end{pmatrix},\cdots$$

なぜそうなるのか？N=2 の場合について説明しよう．

$$\Pi = \begin{bmatrix} p & 1-p \\ q & 1-q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p & \overline{p} \\ q & \overline{q} \end{bmatrix}$$

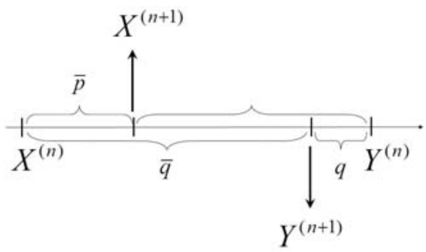
とする．

$$\Pi^n = \begin{bmatrix} X^{(n)} & \overline{X}^{(n)} \\ Y^{(n)} & \overline{Y}^{(n)} \end{bmatrix} \quad (X^{(n)} + \overline{X}^{(n)} = 1, Y^{(n)} + \overline{Y}^{(n)} = 1)$$

と表記しよう．すると，　$\Pi^{n+1} = \Pi\Pi^n$ であるので，

$$\begin{aligned} \Pi^{n+1} &= \begin{bmatrix} X^{(n+1)} & \overline{X}^{(n+1)} \\ Y^{(n+1)} & \overline{Y}^{(n+1)} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} p & \overline{p} \\ q & \overline{q} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X^{(n)} & \overline{X}^{(n)} \\ Y^{(n)} & \overline{Y}^{(n)} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} pX^{(n)} + \overline{p}Y^{(n)} & p\overline{X}^{(n)} + \overline{p}\overline{Y}^{(n)} \\ qX^{(n)} + \overline{q}Y^{(n)} & q\overline{X}^{(n)} + \overline{q}\overline{Y}^{(n)} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

となる．下図のように，$X^{(n+1)}$ と $Y^{(n+1)}$ は，$X^{(n)} \sim Y^{(n)}$ をそれぞれ $\overline{p} : p$，$\overline{q} : q$ に内分した値になる．



従って，n→∞に従って，相互に近づいていく．$\overline{X}^{(n+1)}$ と $\overline{Y}^{(n+1)}$ についても同様．また，$X^{(n+1)} + \overline{X}^{(n+1)} = 1$，$Y^{(n+1)} + \overline{Y}^{(n+1)} = 1$ であることも確認できる．　■