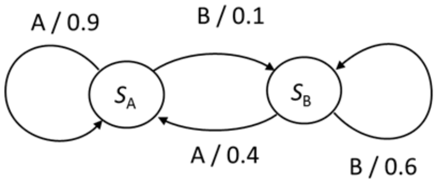
6.9　マルコフ情報源の *n* 次エントロピー

ここでは，次のマルコフ情報源 S の n 次エントロピーを手計算で求めてみる．



(1) S の 1 次エントロピー $H_1(S)$ ：

$$P(\mathrm{A}) = P(\mathrm{A}, S_\mathrm{A}) + P(\mathrm{A}, S_\mathrm{B}) = P(S_\mathrm{A})P(\mathrm{A} \mid S_\mathrm{A}) + P(S_\mathrm{B})P(\mathrm{A} \mid S_\mathrm{B})$$
$$= 0.8 \times 0.9 + 0.2 \times 0.4 = 0.8$$
$$P(\mathrm{B}) = P(\mathrm{B}, S_\mathrm{A}) + P(\mathrm{B}, S_\mathrm{B}) = P(S_\mathrm{A})P(\mathrm{B} \mid S_\mathrm{A}) + P(S_\mathrm{B})P(\mathrm{B} \mid S_\mathrm{B})$$
$$= 0.8 \times 0.1 + 0.2 \times 0.6 = 0.2$$

よって，S の 1 次エントロピー $H_1(S)$ は，$H_1(S) = \mathscr{H}(0.8) \approx 0.722$ である．

(2) S の（1 情報源記号あたりの）2 次エントロピー $H_2(S) = \dfrac{H_1(S^2)}{2}$ ：

$$P(\mathrm{AA}) = P(\mathrm{AA}, S_\mathrm{A}) + P(\mathrm{AA}, S_\mathrm{B})$$
$$= P(S_\mathrm{A})P(\mathrm{AA} \mid S_\mathrm{A}) + P(S_\mathrm{B})P(\mathrm{AA} \mid S_\mathrm{B})$$
$$= 0.8 \times 0.9 \times 0.9 + 0.2 \times 0.4 \times 0.9 = 0.72$$
$$P(\mathrm{AB}) = P(\mathrm{AB}, S_\mathrm{A}) + P(\mathrm{AB}, S_\mathrm{B})$$
$$= P(S_\mathrm{A})P(\mathrm{AB} \mid S_\mathrm{A}) + P(S_\mathrm{B})P(\mathrm{AB} \mid S_\mathrm{B})$$
$$= 0.8 \times 0.9 \times 0.1 + 0.2 \times 0.4 \times 0.1 = 0.08$$
$$P(\mathrm{BA}) = P(\mathrm{BA}, S_\mathrm{A}) + P(\mathrm{BA}, S_\mathrm{B})$$
$$= P(S_\mathrm{A})P(\mathrm{BA} \mid S_\mathrm{A}) + P(S_\mathrm{B})P(\mathrm{BA} \mid S_\mathrm{B})$$
$$= 0.8 \times 0.1 \times 0.4 + 0.2 \times 0.6 \times 0.4 = 0.08$$
$$P(\mathrm{BB}) = P(\mathrm{BB}, S_\mathrm{A}) + P(\mathrm{BB}, S_\mathrm{B})$$
$$= P(S_\mathrm{A})P(\mathrm{BB} \mid S_\mathrm{A}) + P(S_\mathrm{B})P(\mathrm{BB} \mid S_\mathrm{B})$$
$$= 0.8 \times 0.1 \times 0.6 + 0.2 \times 0.6 \times 0.6 = 0.12$$

よって，S の 2 次拡大情報源の 1 次エントロピー $H_1(S^2)$ は，

$$H_1(S^2) = -(0.72 \times \log_2 0.72 + 0.08 \times \log_2 0.08 + 0.08 \times \log_2 0.08 + 0.12 \times \log_2 0.12)$$
$$\approx 1.29$$

よって，S の（1 情報源記号あたりの）2 次エントロピーは，

$$H_2(S) = \frac{H_1(S^2)}{2} \approx 0.646$$

となる．

(3) S の（1 情報源記号あたりの）3 次エントロピー $H_3(S) = \dfrac{H_1(S^3)}{3}$ ：

$$
\begin{aligned}
P(\mathrm{AAA}) &= P(S_\mathrm{A})P(\mathrm{AAA}\,|\,S_\mathrm{A}) + P(S_\mathrm{B})P(\mathrm{AAA}\,|\,S_\mathrm{B}) \\
&= 0.8\times 0.9\times 0.9\times 0.9 + 0.2\times 0.4\times 0.9\times 0.9 = 0.648 \\
P(\mathrm{AAB}) &= P(S_\mathrm{A})P(\mathrm{AAB}\,|\,S_\mathrm{A}) + P(S_\mathrm{B})P(\mathrm{AAB}\,|\,S_\mathrm{B}) \\
&= 0.8\times 0.9\times 0.9\times 0.1 + 0.2\times 0.4\times 0.9\times 0.1 = 0.072 \\
P(\mathrm{ABA}) &= P(\mathrm{ABA}, S_\mathrm{A}) + P(\mathrm{ABA}, S_\mathrm{B}) \\
&= 0.8\times 0.9\times 0.1\times 0.4 + 0.2\times 0.4\times 0.1\times 0.4 = 0.032 \\
P(\mathrm{ABB}) &= P(\mathrm{ABB}, S_\mathrm{A}) + P(\mathrm{ABB}, S_\mathrm{B}) \\
&= 0.8\times 0.9\times 0.1\times 0.6 + 0.2\times 0.4\times 0.1\times 0.6 = 0.048 \\
P(\mathrm{BAA}) &= P(\mathrm{BAA}, S_\mathrm{A}) + P(\mathrm{BAA}, S_\mathrm{B}) \\
&= 0.8\times 0.1\times 0.4\times 0.9 + 0.2\times 0.6\times 0.4\times 0.9 = 0.072 \\
P(\mathrm{BAB}) &= P(\mathrm{BAB}, S_\mathrm{A}) + P(\mathrm{BAB}, S_\mathrm{B}) \\
&= 0.8\times 0.1\times 0.4\times 0.1 + 0.2\times 0.6\times 0.4\times 0.1 = 0.008 \\
P(\mathrm{BBA}) &= P(\mathrm{BBA}, S_\mathrm{A}) + P(\mathrm{BBA}, S_\mathrm{B}) \\
&= 0.8\times 0.1\times 0.6\times 0.4 + 0.2\times 0.6\times 0.6\times 0.4 = 0.048 \\
P(\mathrm{BBB}) &= P(\mathrm{BBB}, S_\mathrm{A}) + P(\mathrm{BBB}, S_\mathrm{B}) \\
&= 0.8\times 0.1\times 0.6\times 0.6 + 0.2\times 0.6\times 0.6\times 0.4 = 0.072
\end{aligned}
$$

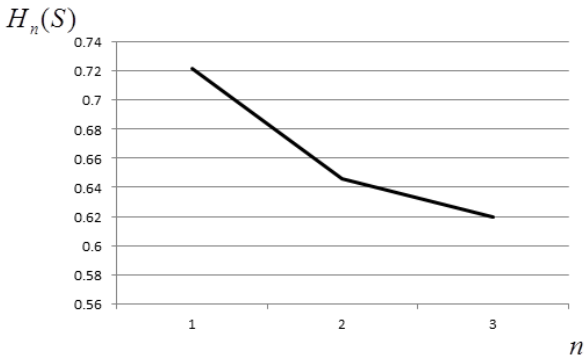
よって，S の 3 次拡大情報源の 1 次エントロピー $H_1(S^3)$ は,

$$
\begin{aligned}
H_1(S^3) = -(&0.648*\mathrm{Log}[2, 0.648] + 0.072*\mathrm{Log}[2, 0.072] \\
&+ 0.032*\mathrm{Log}[2, 0.032] + 0.048*\mathrm{Log}[2, 0.048] \\
&+ 0.072*\mathrm{Log}[2, 0.072] + 0.008*\mathrm{Log}[2, 0.008] \\
&+ 0.048*\mathrm{Log}[2, 0.048] + 0.072*\mathrm{Log}[2, 0.072]) \\
\approx\, &1.8607
\end{aligned}
$$

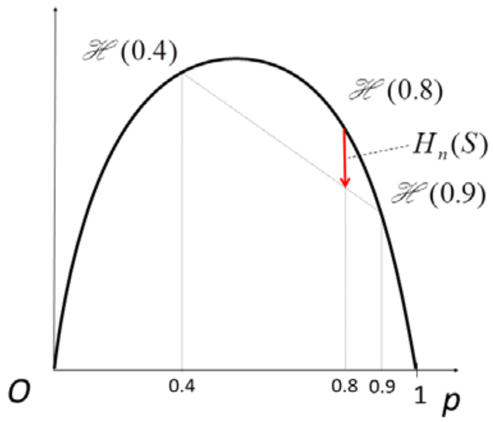
S の（1 情報源記号あたりの）3 次エントロピーは,

$$
H_3(S) = \frac{H_1(S^3)}{3} \approx 0.620
$$

このように，$H_n(S)$ の 1 次エントロピーは $H_1(S) = \mathscr{H}(0.8) \approx 0.722$ であるが，n の増加とともに $H_n(S)$ の値は少しずつ減少し，$H_\infty(S) = 0.8\mathscr{H}(0.9) + 0.2\mathscr{H}(0.4) \approx 0.569$ に漸近していく．この様子を下図に示す.



n が増加するときの n 次エントロピーの値の変化の背後にある構造は次のように図示できる．



$H_1(S)$は, 記憶のあるマルコフ情報源を状況に関わりなく 0.8 の確率で 0 を発生する無記憶情報源として近似するものであり，記憶を無視する分だけエントロピーは大きい（次に発生する情報源記号が予測しがたい）．しかし，n 個の連続した情報源記号を考慮に入れて予測し難さを評価する n 次エントロピーでは，先行する情報源記号の系列を考慮に入れられるので，予測しやすさが少しずつ増していき，それに応じてエントロピー値が減少する．