14.2 確率分布

標本空間 Ω 上で定義された実数値関数 $X(\omega)$ があり，任意の実数 x に対して標本点の集合 $\{\omega \mid X(\omega) \le x\}$ の生起する確率 $P(\{\omega \mid X(\omega) \le x\})$ が常に定義されるとき，$X(\omega)$ を**確率変数**と呼ぶ．また，$F(x) = P(\{\omega \mid X(\omega) \le x\})$ ― 以下では，簡単のために，$P(X \le x)$ と表記される ― を確率変数 X の**分布関数**と呼ぶ．試行の結果，$X(\omega) = x$ が観測されたとき，x を確率変数 X の**実現値**と呼ぶ．

確率変数の実現値が高々加算無限個であるとき，その確率変数は**離散型確率変数**であると言われる．**確率関数** $p_{x_i} = P(X = x_i)$ は，確率変数 $X(\omega)$ が実現値 x_i $(i = 1,2,\cdots)$ をとる確率を規定し，$F(x) = \sum_{x_i \le x} p_{x_i}$ となる．

確率変数の実現値が任意の実数の場合，つまり**連続型確率変数**の場合である．この場合は，分布関数 $F(x)$ は，

$$f(x) \ge 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$$

を満たす**確率密度関数** $f(x)$ を用いて，

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)dy$$

と表現されることが多い．

期待値

離散型確率変数の場合．確率 $p_1, p_2, \cdots$ で実現値 $x_1, x_2, \cdots$ をとる離散型確率変数 X について，

$$\mu = E[X] = \sum_{i=1}^{\infty} p_i x_i$$

を X の**期待値**あるいは**平均**と呼ぶ．また，

$$\sigma^2 = E[(X-\mu)^2] = \sum_{i=1}^{\infty} p_i (x_i - \mu)^2$$

を X の**分散**，σ を X の**標準偏差と呼ぶ**．

連続型確率変数の場合．確率密度関数 $f(x)$ で規定される連続型確率変数 X の期待値 μ と分散 σ^2 は次のように定義される．

$$\mu = E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$$

$$\sigma^2 = E[(X-\mu)^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f(x)dx$$

σ^2 については，次の性質が等式が成り立つ．

$$\sigma^2 = E[(X-\mu)^2] = E[X^2 - 2\mu X + \mu^2] = E[X^2] - 2\mu^2 + \mu^2 = E[X^2] - \mu^2$$

多次元の確率分布

標本点 ω に k 次の実数ベクトル $\mathbf{X}(\omega) = (X_1(\omega), \cdots, X_k(\omega))$ を対応付ける．このとき，k 個の実数 $x_1, \cdots, x_k$ に対して定義される関数

$$F(x_1,\cdots,x_k)=P\left(X_1(\omega)\le x_1,\cdots,X_k(\omega)\le x_k\right)$$

を $\mathbf{X}$ の**結合分布関数**という.

離散型の場合. $\mathbf{X}$ が実現値 $(x_1,\cdots,x_k)$ をとる確率を規定する多次元確率関数

$$p_{x_1,\cdots,x_k}=P\left(X_1=x_1,\cdots,X_k=x_k\right)$$

が定められ,

$$p_{x_1,\cdots,x_k}\ge 0$$

$$\sum_{x_1}\cdots\sum_{x_k}p_{x_1,\cdots,x_k}=1$$

を満たす.

連続型の場合.

$$f(x_1,\cdots,x_k)\ge 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}f(x_1,\cdots,x_k)dx_1\cdots dx_k=1$$

を満たす結合確率密度関数を用いて, 分布関数が,

$$F(x_1,\cdots,x_k)=\int_{-\infty}^{x_1}\cdots\int_{-\infty}^{x_k}f(y_1,\cdots,y_k)dy_1\cdots dy_k$$

と定義される.

さらに, 条件付き確率密度関数も 1 次元の場合と同様に定義される.

参考文献

芝祐順. 統計的方法 II　推測, 新曜社, 1976.

坂元慶行, 石黒真木夫, 北川源四郎. 情報統計学, 共立出版, 1983.