14.3 確率分布の具体例

2 項分布

確率関数が，n 回の独立に繰り返された試行において，生起確率 p の着目した事象が k 回起きる確率

$$b(k,p)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$$

で規定される分布．ここで，$\binom{n}{k}$ は ${}_nC_k$ を表す．

$$\sum_{k=0}^{n}b(k,p)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}=(p+(1-p))^n=1$$

であるので，$b(k,p)$ は確率関数となる．また，2 項分布の期待値 μ と分散 σ^2 は，

$$\mu=\sum_{k=0}^{n}kb(k,p)=\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}=\sum_{k=1}^{n}k\cdot\frac{n}{k}\cdot\binom{n-1}{k-1}\cdot p\cdot p^{k-1}(1-p)^{n-k}$$

$$=np\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}\cdot p^{k-1}(1-p)^{n-k}=np(p+(1-p))^{n-1}=np$$

$$\sigma^2=\sum_{k=0}^{n}k^2b(k,p)-\mu^2$$

ここで，

$$\sum_{k=0}^{n}k^2b(k,p)=\sum_{k=1}^{n}k^2\cdot\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}=\sum_{k=1}^{n}k^2\cdot\frac{n}{k}\cdot\binom{n-1}{k-1}\cdot p\cdot p^{k-1}(1-p)^{n-k}$$

$$=np\sum_{k=1}^{n}k\binom{n-1}{k-1}\cdot p^{k-1}(1-p)^{n-k}=np\left(1+\sum_{k=2}^{n}k\binom{n-1}{k-1}\cdot p^{k-1}(1-p)^{n-k}\right)$$

$$=np\left(1+\sum_{l=0}^{n}l\binom{n-1}{l}\cdot p^{l}(1-p)^{n-1-l}\right)=np(1+(n-1)p)=np+n^2p^2-np^2$$

であるので，$\sigma^2=np+n^2p^2-np^2-n^2p^2=np(1-p)$ となる．

ポアソン分布

確率関数が

$$p(k,\lambda)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$$

で与えられる分布．2 項分布の確率関数において $np=\lambda$ と置くと，

$$\begin{aligned}
b(k,p)&=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}\\
&=\frac{n!}{(n-k)!k!}\cdot\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k\cdot\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n\cdot\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k}\\
&=\frac{\lambda^k}{k!}\cdot\frac{n\cdot(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k}\cdot\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n\cdot\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k}\\
&=\frac{\lambda^k}{k!}\cdot 1\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n\cdot\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k}\\
&=\frac{\lambda^k}{k!}\cdot\left(\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-\frac{n}{\lambda}}\right)^{-\lambda}\cdot 1\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k}
\end{aligned}$$

となる．ここで，$\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^m=e$ である [1]ので，$np=\lambda$ の値を一定に保ったまま，$n\to\infty, p\to 0$ としたときの極限をとれば，ポアソン分布の確率関数

$$b(k,p)\to\frac{\lambda^k}{k!}\cdot e^{-\lambda}$$

が得られる．また，

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}\cdot e^{-\lambda}=1$$

である．

ポアソン分布の期待値 μ と分散 σ^2 は，次のようになる．

$$\mu=E[k]=\sum_{k=0}^{\infty}k\cdot\frac{\lambda^k}{k!}\cdot e^{-\lambda}=\lambda\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}\cdot e^{-\lambda}=\lambda\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}\cdot e^{-\lambda}=\lambda\cdot e^{\lambda}\cdot e^{-\lambda}=\lambda$$

---

[1] ln をとって考えてみると，次のように導ける．

$$\lim_{m\to\infty}\ln\left(1+\frac{1}{m}\right)^m=\lim_{m\to\infty}m\ln\left(1+\frac{1}{m}\right)=\lim_{m\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{m}\right)}{\frac{1}{m}}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}}{1}=1$$

$$
\begin{aligned}
\sigma^2 &= E[k^2]-\mu^2 = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \frac{\lambda^k}{k!}\cdot e^{-\lambda} - \lambda^2 = \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{\lambda^k}{(k-1)!}\cdot e^{-\lambda} - \lambda^2 \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} ((k-1)+1) \frac{\lambda^k}{(k-1)!}\cdot e^{-\lambda} - \lambda^2 = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda^k}{(k-2)!}\cdot e^{-\lambda} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{(k-1)!}\cdot e^{-\lambda} - \lambda^2 \\
&= \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 \\
&= \lambda
\end{aligned}
$$

一様分布

密度関数が

$$
u(x) = \begin{cases} 1 & 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}
$$

で与えられる．この分布に従う確率変数を U とすれば，U の期待値と分散は，

$$
E[U] = \int_0^1 x dx = \tfrac{1}{2}
$$

$$
\sigma^2 = \int_0^1 x^2 dx - \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 = \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} = \tfrac{1}{12}
$$

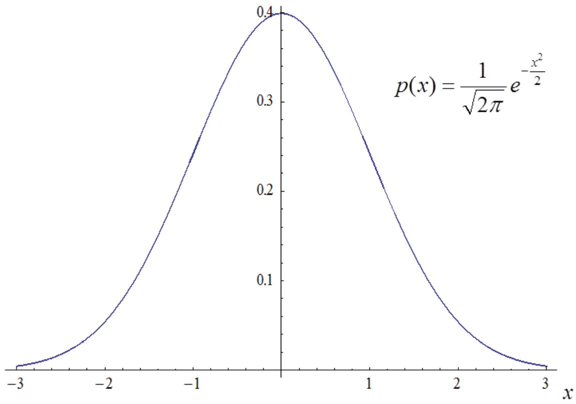
となる．

正規分布（ガウス分布）

確率密度関数が

$$
p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}
$$

で規定される．$\sigma = 1, \mu = 0$ のときの形状を下に示す．



実際，

$$
\int_{-\infty}^{\infty} p(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = 1
$$

が満たされる．この式の両辺を μ で偏微分すると，

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \frac{-2(\mu - x)}{2\sigma^2} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = 0$$

となるので,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-\mu)}{\sigma^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = 0$$

ゆえに,

$$\frac{1}{\sigma^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = \frac{\mu}{\sigma^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = \frac{\mu}{\sigma^2}$$

従って，正規分布に従う確率変数 X の期待値は

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx = \mu$$

分散については,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-\mu)}{\sigma^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = 0$$

の両辺をもう一度 μ で偏微分して,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-\mu)}{\sigma^2} \frac{(x-\mu)}{\sigma^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = 0$$

となる．すなわち,

$$E[(X-\mu)^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = \sigma^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = \sigma^2$$

多次元正規分布（多次元ガウス分布）

結合確率分布が

$$p(x_1, \cdots, x_k) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{k}{2}} |\mathbf{\Sigma}|^{\frac{1}{2}}} \exp\left[-\frac{1}{2} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}) \mathbf{\Sigma}^{-1} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^{\mathrm{T}} \right]$$

によって規定される．ここで,

$$\mathbf{x} = (x_1, \cdots, x_k),\ \boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \cdots, \mu_k),\quad \mu_i = E[X_i]$$

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix} \ddots & \cdots & \iddots \\ \vdots & \sigma_{ij} & \vdots \\ \iddots & \cdots & \ddots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ddots & \cdots & \iddots \\ \vdots & E[(X_i - \mu_i)(X_j - \mu_j)] & \vdots \\ \iddots & \cdots & \ddots \end{bmatrix}$$

である. $k \times k$ 行列 $\mathbf{\Sigma}$ は共分散行列と呼ばれる. $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ であるので， $\mathbf{\Sigma}$ は対称行列である.

【例】 $n = 2$ の場合． $\mu_1 = \mu_2 = 0,\ \sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma^2$ とする.

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{bmatrix} \qquad |\mathbf{\Sigma}| = \sigma_{11}\sigma_{22} - \sigma_{12}\sigma_{21} \qquad \mathbf{\Sigma}^{-1} = |\mathbf{\Sigma}|^{-1} \begin{bmatrix} \sigma_{22} & -\sigma_{12} \\ -\sigma_{21} & \sigma_{11} \end{bmatrix}$$

$$(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})^{\mathrm{T}} = |\boldsymbol{\Sigma}|^{-1}(x_1, x_2)\begin{bmatrix}\sigma_{22} & -\sigma_{12} \\ -\sigma_{21} & \sigma_{11}\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x_1 \\ x_2\end{pmatrix}$$
$$= |\boldsymbol{\Sigma}|^{-1}(\sigma_{22}x_1{}^2 - \sigma_{21}x_2x_1 - \sigma_{12}x_1x_2 + \sigma_{11}x_2{}^2)$$

ここで，　X_0 と X_1 の相関係数 ρ を次のように定義する．

$$\rho = \frac{E[(X_1-\mu_1)(X_2-\mu_2)]}{\sqrt{E[(X_1-\mu_1)^2]E[(X_2-\mu_2)^2]}} = \frac{\sigma_{12}}{\sqrt{\sigma_{11}\sigma_{22}}} = \frac{\sigma_{12}}{\sigma^2}$$

ρ は X_0 と X_1 の確率変数の間の関係の強さを表す指標であり，−1 から 1 までの値をとる．$X_0 = X_1$ であれば $\rho = 1$，$X_0 = -X_1$ であれば $\rho = -1$，X_0 と X_1 が独立であれば，$\rho = 0$ となる．$|\boldsymbol{\Sigma}| = \sigma_{11}\sigma_{22} - \sigma_{12}\sigma_{21}$ であるので，　ρ を用いると，

$$|\boldsymbol{\Sigma}| = \sigma_{11}\sigma_{22} - \sigma_{12}\sigma_{21} = \sigma^4(1-\rho^2)$$
$$(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})^{\mathrm{T}} = (\sigma^4(1-\rho^2))^{-1}(\sigma^2x_1{}^2 - 2\sigma^2x_1x_2 + \sigma^2x_2{}^2)$$
$$= \frac{x_1{}^2 - 2\rho x_1x_2 + x_2{}^2}{\sigma^2(1-\rho^2)}$$

となる．以上をまとめると，

$$p(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma^2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left[-\frac{x_1{}^2 - 2\rho x_1x_2 + x_2{}^2}{2\sigma^2(1-\rho^2)}\right]$$

となる．

確率過程

　時系列解析では，時間軸に沿って確率変数 $X_1, \cdots, X_k$ を設定し，対象の時間的発展を分析する．定常的な情報源から得られた時系列であれば，各 X_i の平均 μ_i は全て等しく，分散に関しては，任意の整数 l に対して，　$\sigma_{i-l,j-l}{}^2 = \sigma_{i,j}{}^2$ である．

参考文献

芝祐順．統計的方法Ⅱ　推測，新曜社，1976.
坂元慶行，石黒真木夫，北川源四郎．情報統計学，共立出版，1983.
今井秀樹．情報理論，昭晃堂，1974.