2014年度情報理論到達確認テスト(6月9日 8:45-10:15実施)解答例

問題 1　無記憶定常情報源 S の情報源記号の集合を $\{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7, A_8, A_9\}$ とし，その生起確率を $\{0.49, 0.14, 0.14, 0.07, 0.07, 0.04, 0.02, 0.02, 0.01\}$ とする．次の 3 つの方法で情報源 2 元符号化を行い，その平均符号長を比較せよ．どこが違うか論じなさい．

(1) シャノン符号化：情報源記号を生起確率の降順に並べ，それを $\{B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6, B_7, B_8, B_9\}$ とする． $u_1 = 0, u_i = u_{i-1} + P(B_{i-1})\ (2 \le i \le 9)$ として， $\{u_1, \cdots, u_9\}$ を順次計算する． $1 \le i \le 9$ に対して， u_i を $l_i = \lceil -\log_2 P(B_i) \rceil$ 桁まで 2 進展開し，小数点以下の系列を B_i の符号語とする．ただし， $\lceil x \rceil$ は x 以上の整数を表す，

(2) ファノ符号化：情報源記号を生起確率の降順に並べ， $\{B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6, B_7, B_8, B_9\}$ とする． $\{B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6, B_7, B_8, B_9\}$ を $P(B_1) + \ldots + P(B_j)$ と $P(B_{j+1}) + \ldots + P(B_9)$ の差ができるだけ小さくなるように二つのグループ $\{B_1, \ldots, B_j\}$ と $\{B_{j+1}, \ldots, B_9\}$ に分割し，一方のグループに符号アルファベット 0 を，他方に 1 を割り当てる．それぞれのグループに対して再帰的に上記の作業を繰り返す．

(3) ハフマン符号化

解答例

(1) シャノン符号化

情報源記号／生起確率／累積確率／桁数／符号

A_1	0.49	0	2	00
A_2	0.14	0.49	3	011
A_3	0.14	0.63	3	101
A_4	0.07	0.77	4	1100
A_5	0.07	0.84	4	1101
A_6	0.04	0.91	5	11101
A_7	0.02	0.95	6	111100
A_8	0.02	0.97	6	111110
A_9	0.01	0.99	7	1111110

平均符号長 2.89

(2) ファノ符号化

A_1	0.49	0.49	0	0										
A_2	0.14	0.51	1		0	0.14	0	100						
A_3	0.14		1	0.28	0	0.14	1	101						
A_4	0.07		1	0.23	1		0		0	1100				
A_5	0.07		1		1	0.14	0		1	1101				
A_6	0.04		1		1	0.09	1	0.04	0	1110				
A_7	0.02		1		1		1	0.05	1	0.02	0	11110		
A_8	0.02		1		1		1		1	0.03	1	0.02	0	111110
A_9	0.01		1		1		1		1		1	0.01	1	111111

平均符号長　2.33

(3) ハフマン符号化

A_1	0.49	0.49	0.49	0.49	0.49	0.49	0.49	0.49	0
A_2	0.14	0.14	0.14	0.14	0.14	0.14	0.28	0.51	100
A_3	0.14	0.14	0.14	0.14	0.14	0.14			101
A_4	0.07	0.07	0.07	0.07	0.14	0.23	0.23		1100
A_5	0.07	0.07	0.07	0.07					1101
A_6	0.04	0.04	0.04	0.09	0.09				1110
A_7	0.02	0.02	0.05						11110
A_8	0.02	0.03							111110
A_9	0.01								111111

平均符号長　2.33

(4) シャノン符号化とファノ符号化は，手法は簡単であるが，必ずしもコンパクト符号を与えるという保証はない．ハフマン符号化は，必ずコンパクト符号を与える．

$\boxed{\text{問題 2}}$ 次の遷移確率行列Tで表わされたマルコフ情報源Sがある．

$$T=\begin{bmatrix} 0 & 0 & p & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}-p & 0 \\ \frac{1}{2}-p & 0 & \frac{1}{2} & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ p & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}-p \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{ただし，} 0<p<\tfrac{1}{2}$$

ここで，i番目の状態S_iに遷移するとき情報源記号A_i $(A_i \neq A_j \text{ if } i \neq j)$が生成されるものとする．また，$p$は$\frac{1}{2}$に十分近いとする．

$\boxed{\text{設問 1}}$ Sが正規マルコフ情報源であることを示せ．
$\boxed{\text{設問 2}}$ Sの挙動を定性的に述べよ．
$\boxed{\text{設問 3}}$ 十分大きなnに対して，T^nの値を概算せよ．
$\boxed{\text{設問 4}}$ Sの 1 次エントロピー$H_1(S)$，1 情報源記号あたりの 2 次エントロピー$H_2(S)$，1 情報源記号あたりのn次エントロピー$H_n(S)$の値を概算せよ．
$\boxed{\text{設問 5}}$ Sの 1 情報源記号あたりのエントロピー$H(S)$の値を概算せよ．ただし，$H(S)=\lim_{n\to\infty} H_n(S)$である．

解答例

設問 1： Tの正の要素を 1 に置き換えたCについてC^nを用いて計算しても，到達可能性に関して性質は同じである．すなわち，$T_{ij}{}^n>0 \Leftrightarrow C_{ij}{}^n>0$である．実際に$n=1,2,3,\cdots$について$C^n$を順に求めていくと，$n \geq 4$においてすべての要素が非負になることがわかる，

$$C=\begin{matrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} \qquad C^4=\begin{matrix} 8 & 3 & 11 & 11 & 10 & 5 \\ 12 & 7 & 10 & 10 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & 4 & 4 & 11 & 10 \\ 3 & 2 & 4 & 4 & 11 & 10 \\ 12 & 11 & 3 & 3 & 8 & 12 \\ 11 & 10 & 2 & 2 & 3 & 7 \end{matrix}$$

すなわち，$n \geq 4$に対して，どの状態からどの状態へもnステップで遷移し得ることがわかる（周期性もない）．

設問２：
遷移確率行列から遷移図を描いてみると図１のようになる

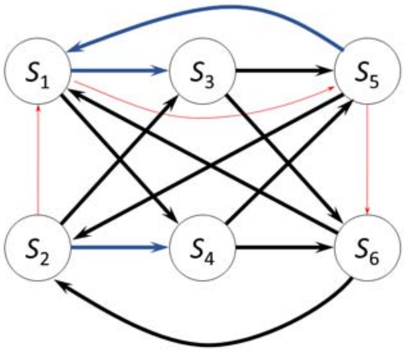

図 1．状態遷移図．黒：確率$\frac{1}{2}$，青：確率 $p \approx \frac{1}{2}$，赤：確率$1-p \approx 0$

$p \approx \frac{1}{2}$ であるので，はじめのうちは，ほぼ周期 3 の周期的挙動を繰り返す．つまり，概ね図 2 のように，黒線のところを：

$$\{S_1, S_2\} \to \{S_3, S_4\} \to \{S_5, S_6\} \to \{S_1, S_2\} \to \cdots$$

という図式に従ってたどる確率が大きい.

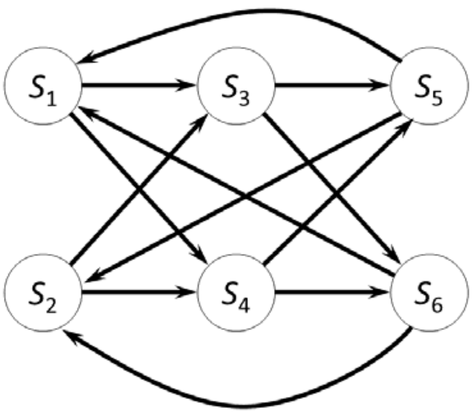

図 2： $p \approx \frac{1}{2}$ の近似的な状態遷移

ここで S_i から S_j に到達する確率は，時刻 $3n$, $3n+1$, $3n+2$ でばらつきが大きい．しかし， $p \neq \frac{1}{2}$ であるので，周期的な動きから外れた動きが出てきて，どの状態から出発しても，十分長い時間が経過すると，S_i から S_j に到達する確率は，ホップ数に依存せず一定になる．

設問３：正規マルコフ情報源であることが判明したので，十分大きな n に対して，

$$T^n \to \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 & u_6 \\ u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 & u_6 \\ u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 & u_6 \\ u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 & u_6 \\ u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 & u_6 \\ u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 & u_6 \end{bmatrix}$$

となるはずである．ここで，$u_1 \cdots u_6$ は次の等式を満たす．

$$\begin{cases} [u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6] \begin{bmatrix} 0 & 0 & p & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}-p & 0 \\ \frac{1}{2}-p & 0 & \frac{1}{2} & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ p & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}-p \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = [u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6] \\ u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 + u_6 = 1 \end{cases}$$

$p \approx \frac{1}{2}$ であるので，

$$[u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6] \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \approx [u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6]$$

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 + u_6 = 1$$

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}u_5 + \tfrac{1}{2}u_6 &\approx u_1 \\ \tfrac{1}{2}u_5 + \tfrac{1}{2}u_6 &\approx u_2 \\ \tfrac{1}{2}u_1 + \tfrac{1}{2}u_2 &\approx u_3 \\ \tfrac{1}{2}u_1 + \tfrac{1}{2}u_2 &\approx u_4 \\ \tfrac{1}{2}u_3 + \tfrac{1}{2}u_4 &\approx u_5 \\ \tfrac{1}{2}u_3 + \tfrac{1}{2}u_4 &\approx u_6 \\ u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 + u_6 &= 1 \end{aligned}$$

から，$u_1 \approx u_2 \approx u_3 \approx u_4 \approx u_5 \approx u_6 \approx \frac{1}{6}$ となる．

設問４： $p \approx \frac{1}{2}$ という前提のもとでは，図 1 において，すべての状態の生起確率は均等にほぼ $\frac{1}{6}$ であり，各状態から確率ほぼ $\frac{1}{2}$ で他の 2 状態に遷移するということを考慮に入れると，次のように計算できる

$$H_1(S) \approx \frac{1}{6}\log_2 6 + \frac{1}{6}\log_2 6 + \frac{1}{6}\log_2 6 + \frac{1}{6}\log_2 6 + \frac{1}{6}\log_2 6 + \frac{1}{6}\log_2 6 = \log_2 6 \approx 2.6$$

$$H_2(S) \approx \frac{1}{2}\left(\underbrace{\frac{1}{12}\log_2 12 + \frac{1}{12}\log_2 12 + \cdots + \frac{1}{12}\log_2 12}_{12}\right) = \frac{1}{2}\log_2 12 = \frac{1}{2}(2 + \log_2 3) \approx 1.8$$

$$H_3(S) \approx \frac{1}{3}\left(\underbrace{\frac{1}{24}\log_2 24 + \frac{1}{24}\log_2 24 + \cdots + \frac{1}{24}\log_2 24}_{24}\right) = \frac{1}{3}\log_2 24 = \frac{1}{3}(3 + \log_2 3) \approx 1.5$$

$$H_n(S) \approx \frac{1}{n}\left(\underbrace{\frac{1}{3\cdot 2^n}\log_2 3\cdot 2^n + \frac{1}{3\cdot 2^n}\log_2 3\cdot 2^n + \cdots + \frac{1}{3\cdot 2^n}\log_2 3\cdot 2^n}_{3\cdot 2^n}\right) = \frac{1}{n}\log_2\left(3\cdot 2^n\right) = \frac{1}{n}(n + \log_2 3)$$

設問５： 設問４から $p \approx \frac{1}{2}$ を利用すると，$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}(n + \log_2 3)\right) = 1$ が得られる．

別解：設問３の結果からも

$$H(S) \approx \frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\log_2\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\log_2\frac{1}{2}\right) \times 6 = 1$$

であることが導ける．

$\boxed{\text{問題 3}}$　通信路行列 $T=\begin{bmatrix}\bar{p} & p \\ q & \bar{q}\end{bmatrix}$ で規定される記憶のない 2 元定常通信路の通信路容量 C を定量的に求めなさい．ただし， $\bar{p}\equiv 1-p, \bar{q}\equiv 1-q$.

解答例

通信路容量の定義により,

$$C=\max_p\left[I(X;Y)\right]=\max_p\left[H(Y)-H(Y\mid X)\right]$$

出力アルファベット 1 の生起確率を y とすると，出力側のエントロピーを $H(Y)$ とすると,

$$H(Y)=-(y\log_2 y+(1-y)\log_2(1-y))$$

となる．入力シンボルの生起確率を $x,\ y$ とする．すると,

$$0\le\{x,\ y\}\le 1,\ x+y=1$$

また,

$$H(Y\mid X)=x\mathscr{H}(p)+y\mathscr{H}(q)$$
$$H(Y)=-(\bar{p}x+qy)\log_2(\bar{p}x+qy)-(px+\bar{q}y)\log_2(px+\bar{q}y)$$

となるので,

$$I(X;Y)=-(\bar{p}x+qy)\log_2(\bar{p}x+qy)-(px+\bar{q}y)\log_2(px+\bar{q}y)-x\mathscr{H}(p)-y\mathscr{H}(q)$$

ラグランジュの未定乗数法により,

$$J=I(X;Y)-\lambda(x+y-1)$$
$$=-(\bar{p}x+qy)\log_2(\bar{p}x+qy)-(px+\bar{q}y)\log_2(px+\bar{q}y)-x\mathscr{H}(p)-y\mathscr{H}(q)-\lambda(x+y-1)$$

と置いて,

$$\frac{\partial J}{\partial x}=\frac{\partial J}{\partial y}=\frac{\partial J}{\partial \lambda}=0$$

を満たす $x,\ y$ を探す.

$$\frac{\partial J}{\partial x}=-\frac{\bar{p}}{\ln 2}\ln(\bar{p}x+qy)-\frac{\bar{p}}{\ln 2}-\frac{p}{\ln 2}\ln(px+\bar{q}y)-\frac{p}{\ln 2}-\mathscr{H}(p)-\lambda$$
$$\frac{\partial J}{\partial y}=-\frac{q}{\ln 2}\ln(\bar{p}x+qy)-\frac{q}{\ln 2}-\frac{\bar{q}}{\ln 2}\ln(px+\bar{q}y)-\frac{\bar{q}}{\ln 2}-\mathscr{H}(q)-\lambda$$
$$x+y-1=0$$

はじめの 2 つの式から

$$(q-\overline{p})\left(\log_2(\overline{p}x+qy)-\log_2(px+\overline{q}y)\right)=\mathscr{H}(p)-\mathscr{H}(q)$$

$$\log_2\frac{\overline{p}x+qy}{px+\overline{q}y}=\frac{\mathscr{H}(p)-\mathscr{H}(q)}{q-\overline{p}}$$

$$\frac{\overline{p}x+qy}{px+\overline{q}y}=2^{\frac{\mathscr{H}(p)-\mathscr{H}(q)}{q-\overline{p}}}$$

$$px2^{\frac{\mathscr{H}(p)-\mathscr{H}(q)}{q-\overline{p}}}+\overline{q}y2^{\frac{\mathscr{H}(p)-\mathscr{H}(q)}{q-\overline{p}}}=\overline{p}x+qy$$

$$\left(p2^{\frac{\mathscr{H}(p)-\mathscr{H}(q)}{q-\overline{p}}}-\overline{p}\right)x=\left(q-\overline{q}2^{\frac{\mathscr{H}(p)-\mathscr{H}(q)}{q-\overline{p}}}\right)y$$

$$x=\frac{q-\overline{q}2^{\frac{\mathscr{H}(p)-\mathscr{H}(q)}{q-\overline{p}}}}{(p-\overline{q})\left(2^{\frac{\mathscr{H}(p)-\mathscr{H}(q)}{q-\overline{p}}}+1\right)},\ y=\frac{p2^{\frac{\mathscr{H}(p)-\mathscr{H}(q)}{q-\overline{p}}}-\overline{p}}{(p-\overline{q})\left(2^{\frac{\mathscr{H}(p)-\mathscr{H}(q)}{q-\overline{p}}}+1\right)}$$

そのとき，

$$\overline{p}x+qy=\frac{\overline{p}\left(q-\overline{q}2^{\frac{\mathscr{H}(p)-\mathscr{H}(q)}{q-\overline{p}}}\right)}{(p-\overline{q})\left(2^{\frac{\mathscr{H}(p)-\mathscr{H}(q)}{q-\overline{p}}}+1\right)}+\frac{q\left(p2^{\frac{\mathscr{H}(p)-\mathscr{H}(q)}{q-\overline{p}}}-\overline{p}\right)}{(p-\overline{q})\left(2^{\frac{\mathscr{H}(p)-\mathscr{H}(q)}{q-\overline{p}}}+1\right)}$$

$$=\frac{(p-\overline{q})2^{\frac{\mathscr{H}(p)-\mathscr{H}(q)}{q-\overline{p}}}}{(p-\overline{q})\left(2^{\frac{\mathscr{H}(p)-\mathscr{H}(q)}{q-\overline{p}}}+1\right)}=\frac{2^{\frac{\mathscr{H}(p)-\mathscr{H}(q)}{q-\overline{p}}}}{2^{\frac{\mathscr{H}(p)-\mathscr{H}(q)}{q-\overline{p}}}+1}$$

$$px+\overline{q}y=\frac{p\left(q-\overline{q}2^{\frac{\mathscr{H}(p)-\mathscr{H}(q)}{q-\overline{p}}}\right)}{(p-\overline{q})\left(2^{\frac{\mathscr{H}(p)-\mathscr{H}(q)}{q-\overline{p}}}+1\right)}+\frac{\overline{q}\left(p2^{\frac{\mathscr{H}(p)-\mathscr{H}(q)}{q-\overline{p}}}-\overline{p}\right)}{(p-\overline{q})\left(2^{\frac{\mathscr{H}(p)-\mathscr{H}(q)}{q-\overline{p}}}+1\right)}$$

$$=\frac{p-\overline{q}}{(p-\overline{q})\left(2^{\frac{\mathscr{H}(p)-\mathscr{H}(q)}{q-\overline{p}}}+1\right)}=\frac{1}{2^{\frac{\mathscr{H}(p)-\mathscr{H}(q)}{q-\overline{p}}}+1}$$

であるので，通信路容量は上記の値を使って，

$$C=-(\overline{p}x+qy)\log_2(\overline{p}x+qy)-(px+\overline{q}y)\log_2(px+\overline{q}y)-x\mathscr{H}(p)-y\mathscr{H}(q)$$

$$=\mathscr{H}\left(\frac{1}{2^{\frac{\mathscr{H}(p)-\mathscr{H}(q)}{q-\overline{p}}}+1}\right)-\frac{\mathscr{H}(p)\left(q-\overline{q}2^{\frac{\mathscr{H}(p)-\mathscr{H}(q)}{q-\overline{p}}}\right)}{(p-\overline{q})\left(2^{\frac{\mathscr{H}(p)-\mathscr{H}(q)}{q-\overline{p}}}+1\right)}-\frac{\mathscr{H}(q)\left(p2^{\frac{\mathscr{H}(p)-\mathscr{H}(q)}{q-\overline{p}}}-\overline{p}\right)}{(p-\overline{q})\left(2^{\frac{\mathscr{H}(p)-\mathscr{H}(q)}{q-\overline{p}}}+1\right)}$$

もう少し右辺を整理すると,

$$\log_2\left(1+2^{\frac{\mathscr{H}(\bar{q})-\mathscr{H}(p)}{\bar{q}-p}}\right)-\frac{2^{\frac{\mathscr{H}(\bar{q})-\mathscr{H}(p)}{\bar{q}-p}}\left(\mathscr{H}(\bar{q})-\mathscr{H}(p)\right)}{\left(\bar{q}-p\right)\left(1+2^{\frac{\mathscr{H}(\bar{q})-\mathscr{H}(p)}{\bar{q}-p}}\right)}$$

$$-\frac{\mathscr{H}(p)\left(\bar{q}+\bar{q}2^{\frac{\mathscr{H}(\bar{q})-\mathscr{H}(p)}{\bar{q}-p}}-1\right)+\mathscr{H}(\bar{q})\left(1-p-p2^{\frac{\mathscr{H}(\bar{q})-\mathscr{H}(p)}{\bar{q}-p}}\right)}{\left(\bar{q}-p\right)\left(1+2^{\frac{\mathscr{H}(\bar{q})-\mathscr{H}(p)}{\bar{q}-p}}\right)}$$

$$=\log_2\left(1+2^{\frac{\mathscr{H}(\bar{q})-\mathscr{H}(p)}{\bar{q}-p}}\right)+\frac{q\left(2^{\frac{\mathscr{H}(\bar{q})-\mathscr{H}(p)}{\bar{q}-p}}+1\right)}{\left(\bar{q}-p\right)\left(1+2^{\frac{\mathscr{H}(\bar{q})-\mathscr{H}(p)}{\bar{q}-p}}\right)}\mathscr{H}(p)-\frac{(1-p)\left(2^{\frac{\mathscr{H}(\bar{q})-\mathscr{H}(p)}{\bar{q}-p}}+1\right)}{\left(\bar{q}-p\right)\left(1+2^{\frac{\mathscr{H}(\bar{q})-\mathscr{H}(p)}{\bar{q}-p}}\right)}\mathscr{H}(\bar{q})$$

$$=\log_2\left(1+2^{\frac{\mathscr{H}(\bar{q})-\mathscr{H}(p)}{\bar{q}-p}}\right)+\frac{q\mathscr{H}(p)-(1-p)\mathscr{H}(\bar{q})}{\bar{q}-p}$$

$$=\log_2\left(\left(1+2^{\frac{\mathscr{H}(\bar{q})-\mathscr{H}(p)}{\bar{q}-p}}\right)2^{\frac{q\mathscr{H}(p)-(1-p)\mathscr{H}(\bar{q})}{\bar{q}-p}}\right)=\log_2\left(2^{\frac{q\mathscr{H}(p)-(1-p)\mathscr{H}(\bar{q})}{\bar{q}-p}}+2^{\frac{-(1-q)\mathscr{H}(p)+p\mathscr{H}(\bar{q})}{\bar{q}-p}}\right)$$

と変形できる.

別解

入力アルファベット1の生起確率を x とすると,

$$y=(1-x)p+x\bar{q}$$

である. x が 0 から 1 の間を動くに従い, y は p から $\bar{q}$ までの間を動く. また,

$$H(Y\mid X)=(1-x)\mathscr{H}(p)+x\mathscr{H}(q)=\left(\frac{\bar{q}-y}{\bar{q}-p}\right)\mathscr{H}(p)+\left(\frac{y-p}{\bar{q}-p}\right)\mathscr{H}(\bar{q})$$

$$H(Y)=-(y\log_2 y+(1-y)\log_2(1-y))$$

から,

$$I=-(y\log_2 y+(1-y)\log_2(1-y))-\left(\left(\frac{\bar{q}-y}{\bar{q}-p}\right)\mathscr{H}(p)+\left(\frac{y-p}{\bar{q}-p}\right)\mathscr{H}(\bar{q})\right)$$

$$\frac{dI}{dy}=\frac{d}{dy}\left(-(y\frac{\ln y}{\ln 2}+(1-y)\frac{\ln(1-y)}{\ln 2})-\left(\left(\frac{\bar{q}-y}{\bar{q}-p}\right)\mathscr{H}(p)+\left(\frac{y-p}{\bar{q}-p}\right)\mathscr{H}(\bar{q})\right)\right)$$

$$=\frac{\ln(1-y)-\ln y}{\ln 2}+\frac{\mathscr{H}(p)}{\bar{q}-p}-\frac{\mathscr{H}(\bar{q})}{\bar{q}-p}$$

$\dfrac{dI}{dy}=0$ を解くと,

$$\log_2\frac{1-y}{y}=\frac{\mathscr{H}(\bar{q})}{\bar{q}-p}-\frac{\mathscr{H}(p)}{\bar{q}-p}$$

$$\frac{1-y}{y}=2^{\frac{\mathscr{H}(\bar{q})}{\bar{q}-p}-\frac{\mathscr{H}(p)}{\bar{q}-p}}$$

$$y=\frac{1}{1+2^{\frac{\mathscr{H}(\bar{q})-\mathscr{H}(p)}{\bar{q}-p}}}$$

※y は次のようにも表現できる：

$$y=\frac{1}{1+2^{\frac{\mathscr{H}(\bar{q})-\mathscr{H}(p)}{\bar{q}-p}}}=\frac{1}{1+2^{\frac{-\bar{q}\log_2\bar{q}-q\log_2 q+p\log_2 p+\bar{p}\log_2\bar{p}}{\bar{q}-p}}}=\frac{1}{1+2^{\log_2\bar{q}^{\frac{-\bar{q}}{\bar{q}-p}}+\log_2 q^{\frac{-q}{\bar{q}-p}}+\log_2 p^{\frac{p}{\bar{q}-p}}+\log_2\bar{p}^{\frac{\bar{p}}{\bar{q}-p}}}}$$

$$=\frac{1}{1+\bar{q}^{\frac{-\bar{q}}{\bar{q}-p}}q^{\frac{-q}{\bar{q}-p}}p^{\frac{p}{\bar{q}-p}}\bar{p}^{\frac{\bar{p}}{\bar{q}-p}}}$$

そのときの I は,

$$H(Y)=\mathscr{H}\left(\frac{1}{1+2^{\frac{\mathscr{H}(\bar{q})-\mathscr{H}(p)}{\bar{q}-p}}}\right)$$

$$=-\frac{1}{1+2^{\frac{\mathscr{H}(\bar{q})-\mathscr{H}(p)}{\bar{q}-p}}}\log_2\left(\frac{1}{1+2^{\frac{\mathscr{H}(\bar{q})-\mathscr{H}(p)}{\bar{q}-p}}}\right)-\frac{2^{\frac{\mathscr{H}(\bar{q})-\mathscr{H}(p)}{\bar{q}-p}}}{1+2^{\frac{\mathscr{H}(\bar{q})-\mathscr{H}(p)}{\bar{q}-p}}}\log_2\left(\frac{2^{\frac{\mathscr{H}(\bar{q})-\mathscr{H}(p)}{\bar{q}-p}}}{1+2^{\frac{\mathscr{H}(\bar{q})-\mathscr{H}(p)}{\bar{q}-p}}}\right)$$

$$=\frac{1}{1+2^{\frac{\mathscr{H}(\bar{q})-\mathscr{H}(p)}{\bar{q}-p}}}\log_2\left(1+2^{\frac{\mathscr{H}(\bar{q})-\mathscr{H}(p)}{\bar{q}-p}}\right)$$

$$+\frac{2^{\frac{\mathscr{H}(\bar{q})-\mathscr{H}(p)}{\bar{q}-p}}}{1+2^{\frac{\mathscr{H}(\bar{q})-\mathscr{H}(p)}{\bar{q}-p}}}\log_2\left(1+2^{\frac{\mathscr{H}(\bar{q})-\mathscr{H}(p)}{\bar{q}-p}}\right)-\frac{2^{\frac{\mathscr{H}(\bar{q})-\mathscr{H}(p)}{\bar{q}-p}}}{1+2^{\frac{\mathscr{H}(\bar{q})-\mathscr{H}(p)}{\bar{q}-p}}}\frac{\mathscr{H}(\bar{q})-\mathscr{H}(p)}{\bar{q}-p}$$

$$=\log_2\left(1+2^{\frac{\mathscr{H}(\bar{q})-\mathscr{H}(p)}{\bar{q}-p}}\right)-\frac{2^{\frac{\mathscr{H}(\bar{q})-\mathscr{H}(p)}{\bar{q}-p}}}{1+2^{\frac{\mathscr{H}(\bar{q})-\mathscr{H}(p)}{\bar{q}-p}}}\frac{\mathscr{H}(\bar{q})-\mathscr{H}(p)}{\bar{q}-p}$$

また,

$$
\begin{aligned}
H(Y \mid X) &= \left(\frac{\bar{q}-y}{\bar{q}-p}\right)\mathscr{H}(p) + \left(\frac{y-p}{\bar{q}-p}\right)\mathscr{H}(\bar{q}) \\
&= \frac{\bar{q} - \dfrac{1}{1+2^{\frac{\mathscr{H}(\bar{q})-\mathscr{H}(p)}{\bar{q}-p}}}}{\bar{q}-p}\mathscr{H}(p) + \frac{\dfrac{1}{1+2^{\frac{\mathscr{H}(\bar{q})-\mathscr{H}(p)}{\bar{q}-p}}} - p}{\bar{q}-p}\mathscr{H}(\bar{q}) \\
&= \frac{\mathscr{H}(p)\left(\bar{q} + \bar{q}\cdot 2^{\frac{\mathscr{H}(\bar{q})-\mathscr{H}(p)}{\bar{q}-p}} - 1\right) + \mathscr{H}(\bar{q})\left(1 - p - p\cdot 2^{\frac{\mathscr{H}(\bar{q})-\mathscr{H}(p)}{\bar{q}-p}}\right)}{(\bar{q}-p)\left(1+2^{\frac{\mathscr{H}(\bar{q})-\mathscr{H}(p)}{\bar{q}-p}}\right)}
\end{aligned}
$$

から求める通信路容量は,

$$
\begin{aligned}
&\log_2\left(1+2^{\frac{\mathscr{H}(\bar{q})-\mathscr{H}(p)}{\bar{q}-p}}\right) - \frac{2^{\frac{\mathscr{H}(\bar{q})-\mathscr{H}(p)}{\bar{q}-p}}\left(\mathscr{H}(\bar{q})-\mathscr{H}(p)\right)}{(\bar{q}-p)\left(1+2^{\frac{\mathscr{H}(\bar{q})-\mathscr{H}(p)}{\bar{q}-p}}\right)} \\
&\quad - \frac{\mathscr{H}(p)\left(\bar{q} + \bar{q}2^{\frac{\mathscr{H}(\bar{q})-\mathscr{H}(p)}{\bar{q}-p}} - 1\right) + \mathscr{H}(\bar{q})\left(1 - p - p2^{\frac{\mathscr{H}(\bar{q})-\mathscr{H}(p)}{\bar{q}-p}}\right)}{(\bar{q}-p)\left(1+2^{\frac{\mathscr{H}(\bar{q})-\mathscr{H}(p)}{\bar{q}-p}}\right)} \\
&= \log_2\left(1+2^{\frac{\mathscr{H}(\bar{q})-\mathscr{H}(p)}{\bar{q}-p}}\right) + \frac{q\left(2^{\frac{\mathscr{H}(\bar{q})-\mathscr{H}(p)}{\bar{q}-p}}+1\right)}{(\bar{q}-p)\left(1+2^{\frac{\mathscr{H}(\bar{q})-\mathscr{H}(p)}{\bar{q}-p}}\right)}\mathscr{H}(p) - \frac{(1-p)\left(2^{\frac{\mathscr{H}(\bar{q})-\mathscr{H}(p)}{\bar{q}-p}}+1\right)}{(\bar{q}-p)\left(1+2^{\frac{\mathscr{H}(\bar{q})-\mathscr{H}(p)}{\bar{q}-p}}\right)}\mathscr{H}(\bar{q}) \\
&= \log_2\left(1+2^{\frac{\mathscr{H}(\bar{q})-\mathscr{H}(p)}{\bar{q}-p}}\right) + \frac{q\mathscr{H}(p) - (1-p)\mathscr{H}(\bar{q})}{\bar{q}-p} \\
&= \log_2\left(\left(1+2^{\frac{\mathscr{H}(\bar{q})-\mathscr{H}(p)}{\bar{q}-p}}\right)2^{\frac{q\mathscr{H}(p)-(1-p)\mathscr{H}(\bar{q})}{\bar{q}-p}}\right) = \log_2\left(2^{\frac{q\mathscr{H}(p)-(1-p)\mathscr{H}(\bar{q})}{\bar{q}-p}} + 2^{\frac{-(1-q)\mathscr{H}(p)+p\mathscr{H}(\bar{q})}{\bar{q}-p}}\right)
\end{aligned}
$$