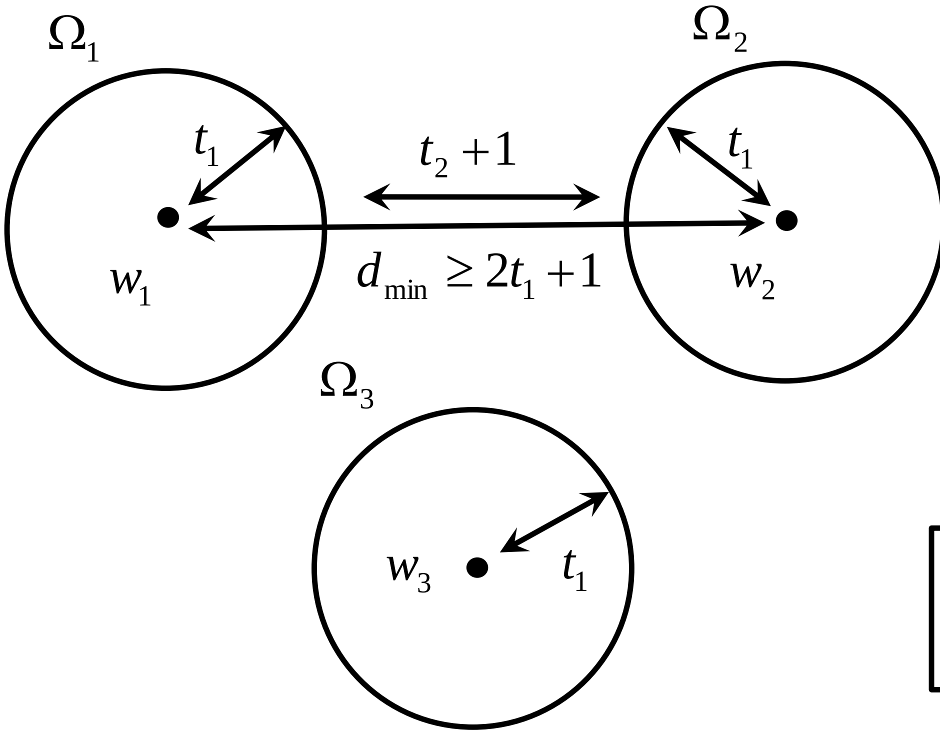
by Toyoaki Nishida

通信路符号化法（1)

限界距離復号法

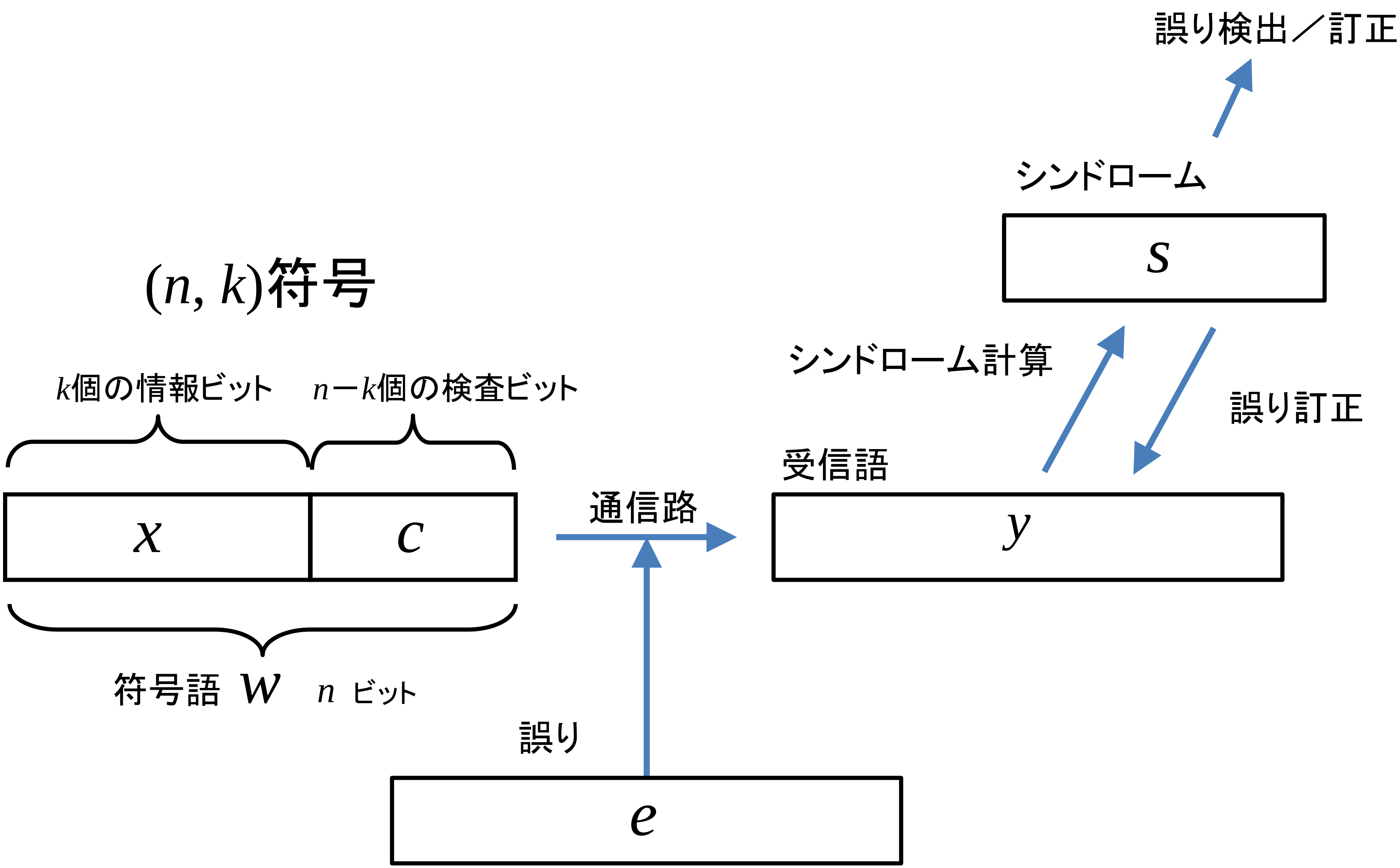
- 符号Cの最小ハミング距離：　$d_{\min} = \min_{u \neq v,\, u,v \in C} d_H(u,v)$
- 受信空間において，各符号語を中心として半径t_1の球を作る.



$d_{\min} \geq 2t_1 + 1$ であれば，これらの球は重複することはない.

- これらの球を復号領域とすれば，この符号により，t_1個以下の誤りを訂正でき，$t_1 + t_2$個以下の誤りを検出できる.

通信路符号化の枠組み

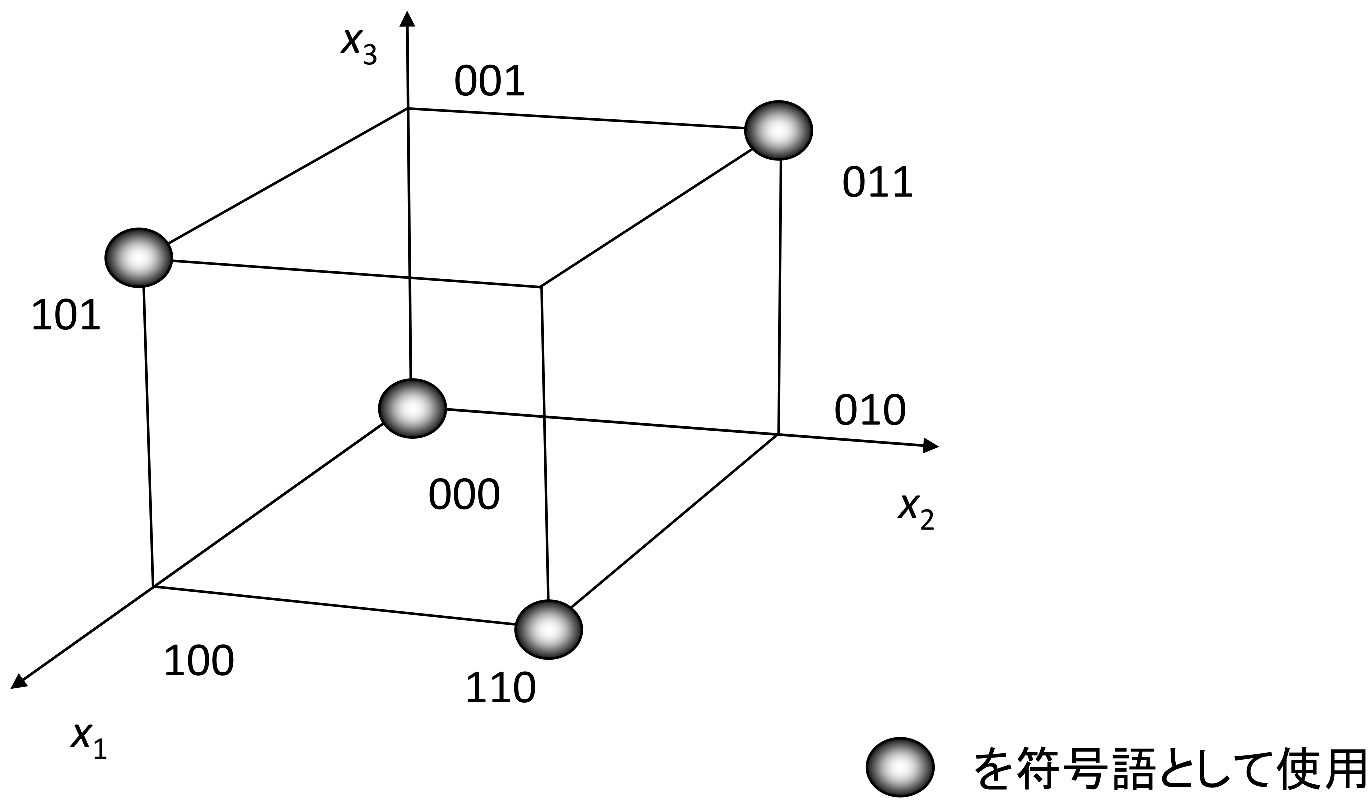


誤り検出／訂正
シンドローム
s
(n, k)符号
シンドローム計算
誤り訂正
k個の情報ビット
n−k個の検査ビット
受信語
通信路
x
c
y
符号語 w n ビット
誤り
e

単一パリティ検査

- 単一パリティ誤り検査符号：長さが$k+1$で，1の個数が偶数であるような全ての2元系列からなる符号長$n=k+1$，符号語数 $M=2^k$の符号語の集まり.

- $k=2$のとき，$C=\{000, 011, 101, 110\}$



単一パリティ検査

- 0,1からなる長さ k の系列 $x_1 \cdots x_k$ を2元通信路を介して送る.
- $x_1, \cdots, x_k$ から $c = x_1 \oplus \cdots \oplus x_k$ なるcを求める.
  $\oplus$は排他的論理和. $x_1 \oplus \cdots \oplus x_k \oplus c = 0$ が成り立つ.
- $x_1 \cdots x_k$ にcを追加した $w = x_1 \cdots x_k c$を通信路符号として伝送する.
  $w = (x_1, \cdots, x_k, c)$ と表記することもある.
- 符号語を$w = w_1 \cdots w_k c$, 誤りパターンを $e = e_1 \cdots e_k e_{k+1}$,
  受信語 $y = y_1 \cdots y_k y_{k+1}$とすれば,

$$y = w \oplus e = (w_1 \oplus e_1, \cdots, w_k \oplus e_k, w_{k+1} \oplus e_{k+1})$$

単一パリティ検査

- 符号語を $w = w_1 \cdots w_k c$,
  誤りパターンを $e = e_1 \cdots e_k e_{k+1}$,
  受信語を $y = y_1 \cdots y_k y_{k+1}$
  シンドロームを $s = y_1 \oplus \cdots \oplus y_k \oplus y_{k+1}$
  とすれば,

$$y = w \oplus e = (w_1 \oplus e_1, \cdots, w_k \oplus e_k, w_{k+1} \oplus e_{k+1})$$

$$\begin{aligned} s &= \left(w_1 \oplus e_1\right) \oplus \cdots \oplus \left(w_k \oplus e_k\right) \oplus \left(w_{k+1} \oplus e_{k+1}\right) \\ &= \left(w_1 \oplus \cdots \oplus w_k \oplus w_{k+1}\right) \oplus \left(e_1 \oplus \cdots \oplus e_k \oplus e_{k+1}\right) \\ &= e_1 \oplus \cdots \oplus e_k \oplus e_{k+1} \end{aligned}$$

- $s = 0$ ならば誤りなし, $s = 1$ ならば誤りありと, 判定することにすれば, 奇数個の誤りが検出可能.

水平垂直パリティ検査符号

例：　3×4=12ビットの情報 (0,1,1,0,1,0,1,1,0,0,0,1)を送信する

【符号化】

情報ビット

x_1: 0	x_2: 1	x_3: 1	x_4: 0
x_5: 1	x_6: 0	x_7: 1	x_8: 1
x_9: 0	x_{10}: 0	x_{11}: 0	x_{12}: 1

検査ビット追加（パリティを用いる）

$w_1=x_1$: 0	$w_2=x_2$:1	$w_3=x_3$:1	$w_4=x_4$:0	$w_{13}=c_1$:0
$w_5=x_5$:1	$w_6=x_6$:0	$w_7=x_7$:1	$w_8=x_8$:1	$w_{14}=c_2$:1
$w_9=x_9$:0	$w_{10}=x_{10}$:0	$w_{11}=x_{11}$:0	$w_{12}=x_{12}$:1	$w_{15}=c_3$:1
$w_{16}=c_4$:1	$w_{17}=c_5$:1	$w_{18}=c_6$:0	$w_{19}=c_7$:0	$w_{20}=c_8$:0

【復号】

受信語

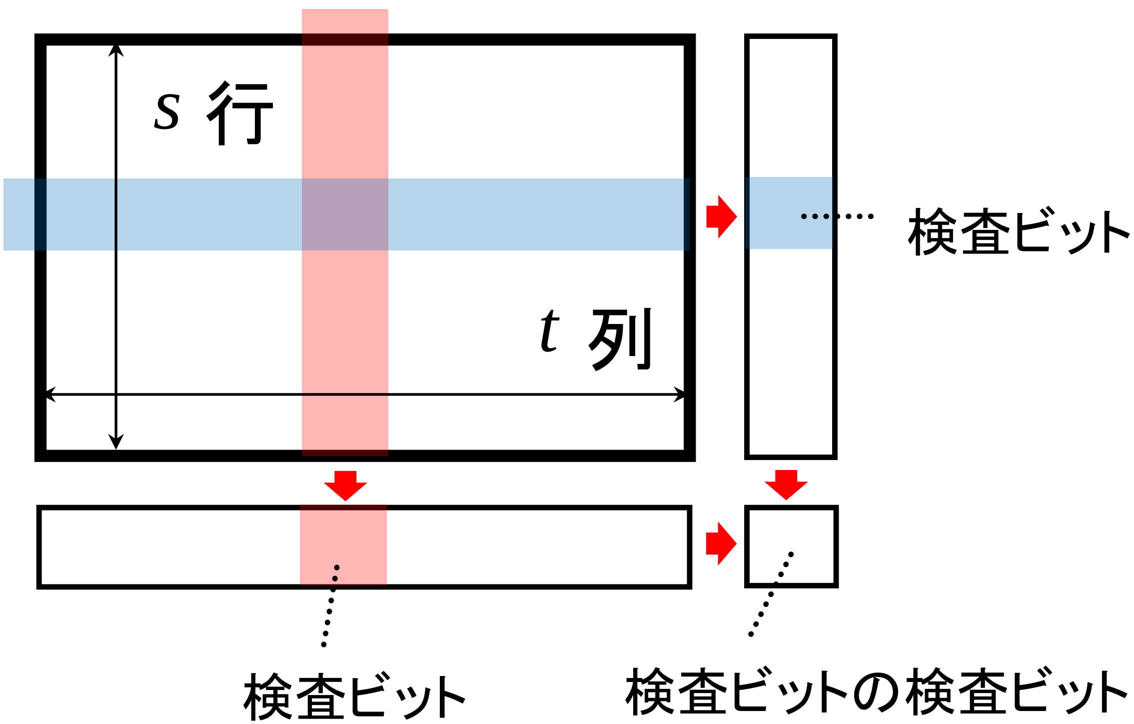
y_1	y_2	y_3	y_4	y_{13}
y_5	y_6	y_7	y_8	y_{14}
y_9	y_{10}	y_{11}	y_{12}	y_{15}
y_{16}	y_{17}	y_{18}	y_{19}	y_{20}

シンドローム計算

$$s_1 = y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_{13}$$
$$s_2 = y_5 + y_6 + y_7 + y_8 + y_{14}$$
$$s_3 = y_9 + y_{10} + y_{11} + y_{12} + y_{15}$$
$$s_4 = y_{16} + y_{17} + y_{18} + y_{19} + y_{20}$$
$$s_5 = y_1 + y_5 + y_9 + y_{16}$$
$$s_6 = y_2 + y_6 + y_{10} + y_{17}$$
$$s_7 = y_3 + y_7 + y_{11} + y_{18}$$
$$s_8 = y_4 + y_5 + y_{12} + y_{19}$$
$$s_9 = y_{13} + y_{14} + y_{15} + y_{20}$$

水平垂直パリティ検査符号

s, t個の情報ビットを$s\times t$の配列に並べ，すべての行および列の１の数が偶数になるように$s+t+1$個の検査ビットを作る.



$\Rightarrow$ $((s+1)(t+1),\ st)$ 符号

水平垂直パリティ検査符号

- 符号化：情報語$(x_1,\cdots,x_{st})$に対して

$$c_k=\begin{cases}\sum_{j=1}^{t}x_{(k-1)t+j} & (1\le k\le s)\\ \sum_{i=1}^{s}x_{(i-1)t+k-s} & (s+1\le k\le s+t)\\ \sum_{l=1}^{s}c_l=\sum_{m=1}^{t}c_{s+m} & (k=s+t+1)\end{cases}$$

となるように$c_k \quad (k=1,\cdots,s+t+1)$ を求め，符号語$w=(x_1,\cdots,x_{st},c_1,\cdots,c_{s+t+1})$ を作る．

- 復号：通信路からの出力$y=(y_1,\cdots,y_{st},y_{st+1},\cdots,y_{st+s+t+1})$に対して，

$$s_k=\begin{cases}y_{st+k}+\sum_{j=1}^{t}y_{(k-1)t+j} & (1\le k\le s)\\ \sum_{j=1}^{t+1}y_{s(t+1)+j} & (k=s+1)\\ y_{st+k-1}+\sum_{i=1}^{s}y_{(i-1)t+k-s-1} & (s+2\le k\le s+t+1)\\ y_{st+s+t+1}+\sum_{i=1}^{s}y_{st+i} & (k=s+t+2)\end{cases}$$

によってシンドロームを計算し，誤り訂正／検出を行う．

ハミング符号

(7, 4)ハミング符号の作り方の一例:

情報ビット (x_1, x_2, x_3, x_4) ➡

検査ビットを

$$\begin{cases} c_1 = x_1 + x_2 + x_3 \\ c_2 = \quad\quad x_2 + x_3 + x_4 \\ c_3 = x_1 + x_2 \quad\quad + x_4 \end{cases}$$

によって計算し,

$$w = (x_1, x_2, x_3, x_4, c_1, c_2, c_3)$$

を符号語とする.

ハミング符号

検査方式

受信語

$$y=(y_1,y_2,y_3,y_4,y_5,y_6,y_7)$$

(1) yに対するシンドローム

$$\begin{cases} s_1 = y_1 + y_2 + y_3 + y_5 \\ s_2 = y_2 + y_3 + y_4 + y_6 \\ s_3 = y_1 + y_2 + y_4 + y_7 \end{cases}$$

(2) シンドロームから次のように誤り訂正

e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	s_1	s_2	s_3
1							1	0	1
	1						1	1	1
		1					1	1	0
			1				0	1	1
				1			1	0	0
					1		0	1	0
						1	0	0	1

ハミング符号

$$w = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_1 + x_2 + x_3, x_2 + x_3 + x_4, x_1 + x_2 + x_4)$$

➡

生成行列

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

を用いて$w=xG$によって符号化する.

ハミング符号

$$y = (x_1 + e_1, x_2 + e_2, x_3 + e_3, x_4 + e_4, x_1 + x_2 + x_3 + e_5, x_2 + x_3 + x_4 + e_6, x_1 + x_2 + x_4 + e_7)$$

検査行列

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

を用いてシンドロームを算出する

$$s = yH^T = (y_1, \cdots, y_7) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

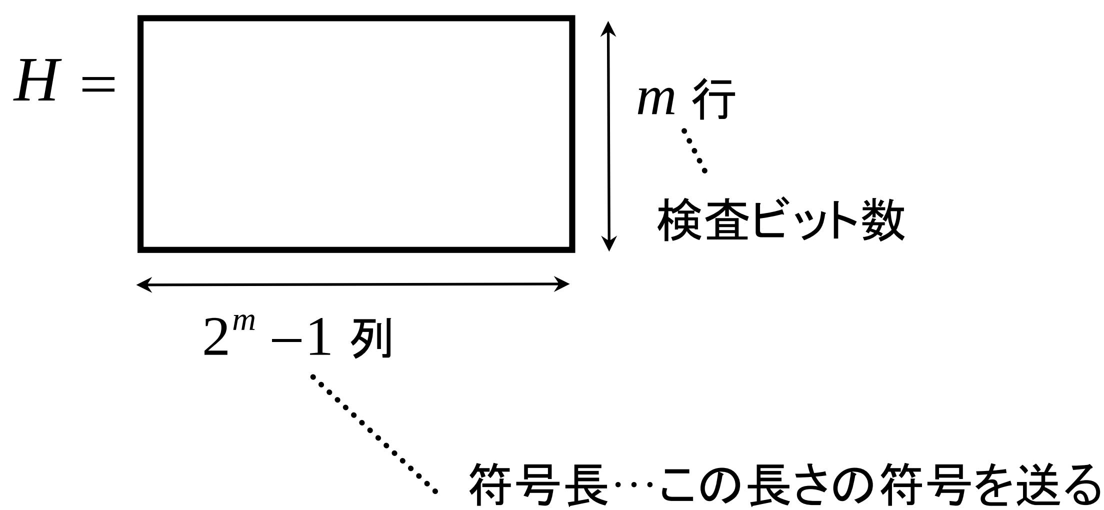
ハミング符号

単一誤りが訂正できるためには，検査行列の全ての列が互いに異なり，全零でなければよい．（全零の列があると，そこで生じた誤りと，誤りなしの場合が区別できない．）

符号長　$n = 2^m - 1$

情報ビット数　$k = 2^m - 1 - m$

検査ビット数　m　　$\Rightarrow \quad (2^m - 1,\ 2^m - 1 - m)$ 符号



線形符号

- 定義:検査記号が情報記号の線形式で与えられる.

$$c = a_1 x_1 + \cdots + a_k x_k$$

- 2元符号Cが線形符号
  $\Leftrightarrow$
  Cの任意の2つの符号語の和がCの符号語になっている.

まとめ

- 誤り検出や訂正を行うためにはシンドロームを用いる.
- 単一パリティ検査は最も単純な誤り検出符号.
- 水平垂直パリティ検査符号を用いると，１誤りが訂正できる.
- ハミング符号は水平垂直パリティ検査符号より効率のよい単一誤り訂正符号である.
- 生成行列と検査行列による符号化とシンドローム計算