

2017 年度情報符号理論到達確認テスト

- 6月12日の講義時間は、調査・討論・解答などに充てます。教科書、ノート、PCなど持ち込み制限はありません。調査・相談は可能です。ただし、調査の場合は調査の方法と得られたことの概要を記載すること、また、相談の場合は、相談相手、相談内容の骨子、自分の貢献、他者から得た知見の骨子を記載すること。答案の単純な転記は認めません。
- 答案は6月19日午後5時までに、PandAで提出してください。添付ファイルで答案提出する場合は、pdfファイルに変換してください。
- 6月26日頃までに第1次採点予定。内容が不十分な場合は再提出を指示することがあります。採点結果は、合格（コメントあり）、再提出、不合格のいずれかです。「再提出」と赤字で記入された答案は指示に従って答案を改訂し、再提出してください。再提出期限は、7月3日17:00です。

次の問題1~3すべてに解答しなさい。

問題1 $M \geq 2$ なる M 個の情報源記号 a_i ($i = 1, \dots, M$)をもつ無記憶情報源 S が与えられたとする。 S の各情報源記号 a_i に対して次のように2元符号語 c_i を定める。

(1) 情報源記号 a_i の生起確率を p_i ($p_i > 0$)とするととき、 α_i ($i = 1, \dots, M$)を次のように定める。

$$\begin{cases} \alpha_i = \frac{1}{2}p_1 & ; i = 1 \\ \alpha_i = \frac{1}{2}p_i + \sum_{k=1}^{i-1} p_k & ; 2 \leq i \leq M \end{cases}$$

(2) $2^{1-l_i} \leq p_i < 2^{2-l_i}$ を満足する整数 l_i に対して、 α_i を2進小数展開したときの小数点以下 l_i 桁の2進数表示を c_i とする。

このとき、次の問いに答えなさい。ここで符号アルファベットは $\{0, 1\}$ とする。

【設問1】 はじめの4つの情報源記号 a_1, a_2, a_3, a_4 について、その生起確率が $p_1 = 0.18, p_2 = 0.08, p_3 = 0.02, p_4 = 0.04$ であるとき、上記の符号化の方式で得られる符号語を示しなさい。

【設問2】 上記の符号化の方式で得られる符号が瞬時符号であることを示しなさい。

【設問3】 上記の符号化の方式で得られる符号の1情報源記号あたり平均符号長の範囲を S のエントロピー $H(S)$ を用いた不等式として示しなさい。

(裏へ続く)

問題2 S を定常正規マルコフ情報源とし、時刻 i に S から発生する情報源記号を X_i とする。このとき、次の設問に答えなさい。

【設問1】一般に、確率変数 X, Y に対するエントロピー $H(X), H(Y)$ 、その結合エントロピー $H(X, Y)$ 、条件つきエントロピー $H(X|Y)$ について

$$H(X, Y) = H(X) + H(Y|X)$$

が成り立つことを示しなさい。

【設問2】任意の n ($n \geq 3$)に対して、次の不等式が成り立つことを示しなさい。

$$H(X_{n-1}|X_1, \dots, X_{n-2}) \geq H(X_n|X_1, \dots, X_{n-1})$$

【設問3】次の式が成り立つことを示しなさい。

$$H(X_1, X_2, \dots, X_n) = H(X_1) + H(X_2|X_1) + H(X_3|X_1, X_2) + \dots + H(X_n|X_1, X_2, \dots, X_{n-1})$$

【設問4】 $H_n(X_1, \dots, X_n) = \frac{1}{n}H(X_1, \dots, X_n)$ とすると、任意の n ($n \geq 2$)に対して、次の不等式が成り立つことを示しなさい。

$$H_n(X_1, \dots, X_n) \geq H(X_n|X_1, \dots, X_{n-1})$$

【設問5】任意の n ($n \geq 2$)に対して、

$$H_{n-1}(X_1, \dots, X_{n-1}) \geq H_n(X_1, \dots, X_n)$$

が成立し、 $n \rightarrow \infty$ のとき $H_n(X_1, \dots, X_n)$ が収束することを示しなさい。

問題3 通信路行列 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$ で規定される無記憶通信路の通信路容量を求めなさい。

(以上)