

8. 通信路容量

通信路容量は、条件付確率モデルで規定された通信路に固有の量であり、入力確率分布が変化したときの入力と出力の間の相互情報量の最大値として定義される。今回は、通信路容量の計算方法を通して、その性質を学ぶ。

8.1 通信路容量

図1のような記憶のない定常通信路 T が与えられたとしよう。

$$P_X(a_i) \triangleq p_i, P_Y(b_j) \triangleq q_j, P_{Y|X}(b_j|a_i) \triangleq p_{ij}$$

$$P_{X,Y}(a_i, b_j) = P_X(a_i)P_{Y|X}(b_j|a_i) = p_i p_{ij}$$

$$H(Y) = - \sum_j P_Y(b_j) \log_2 P_Y(b_j) = - \sum_j q_j \log_2 q_j = - \sum_{i,j} p_i q_j \log_2 q_j$$

$$H(Y|X) = \sum_{i,j} P_{X,Y}(a_i, b_j) \log_2 P_{Y|X}(b_j|a_i) = \sum_{i,j} p_i p_{ij} \log_2 p_{ij}$$

であるので、通信路 T への入力 X と T からの出力 Y の相互情報量は次のようになる。

$$I(X;Y) = H(Y) - H(Y|X) = - \sum_j q_j \log_2 q_j + \sum_{i,j} p_i p_{ij} \log_2 p_{ij} = \sum_{i=1}^r p_i \left(\sum_{j=1}^s p_{ij} \log_2 \frac{p_{ij}}{q_j} \right)$$

このとき次のようにして決まる量

$$C = \max_p I(X;Y) \quad \text{ここで、} \mathbf{p} = (p_1, \dots, p_r) \text{は入力の確率分布}$$

を T の**通信路容量**という。通信路の両端の相互情報量は、入力確率分布（または出力確率分布）に依存するが、通信路容量はその最大値であり、通信路固有の値である。

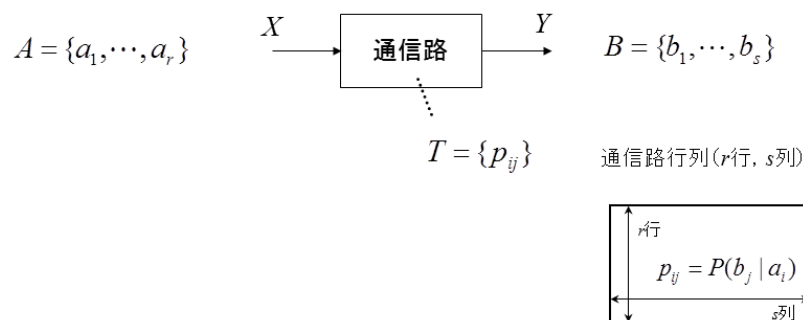


図1. 記憶のない定常通信路 T

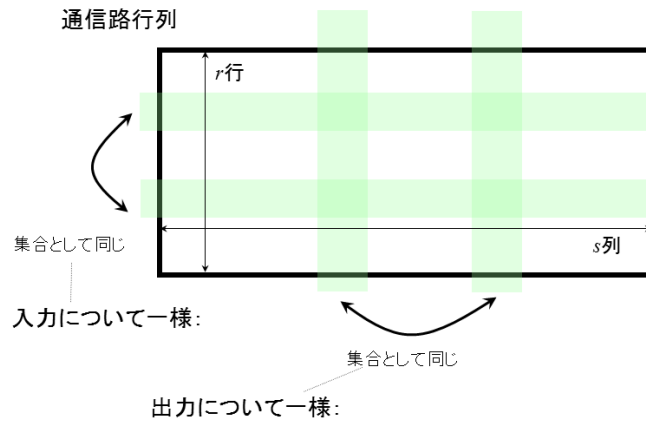


図 2. 入力と出力について一様な通信路の概念

8.2 記憶のない一様通信路の通信路容量

BSC や BSEC のように通信路が一様，すなわち，どの入力シンボル，あるいは，出力信号についても同様の伝達特性をもつとき，その性質を利用して通信路容量を簡単に導出できる。

一様性には，「入力について一様」と「出力について一様」がある（図 2）。

入力について一様な通信路の通信路容量は次のように求められる。

$$\begin{aligned}
 C &= \max_{\mathbf{p}} I(X; Y) \\
 &= \max_{\mathbf{p}} \left(- \sum_j q_j \log_2 q_j + \sum_{i,j} p_i p_{ij} \log_2 p_{ij} \right) \\
 &= \max_{\mathbf{p}} \left(H(Y) + \sum_{j=1}^s p_{1j} \log_2 p_{1j} \right) \\
 &= \max_{\mathbf{p}} H(Y) + \sum_{j=1}^s p_{1j} \log_2 p_{1j}
 \end{aligned}$$

なぜならば， $\{p_{\alpha 1}, \dots, p_{\alpha s}\} = \{p_{\beta 1}, \dots, p_{\beta s}\}$ だから

$$\sum_{j=1}^s p_{\alpha j} \log_2 p_{\alpha j} = \sum_{j=1}^s p_{\beta j} \log_2 p_{\beta j} = \sum_{j=1}^s p_{1j} \log_2 p_{1j}$$

である。したがって，

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^r p_i \left(\sum_{j=1}^s p_{ij} \log_2 p_{ij} \right) &= \sum_{i=1}^r p_i \left(\sum_{j=1}^s p_{1j} \log_2 p_{1j} \right) \\
 &= \sum_{j=1}^s p_{1j} \log_2 p_{1j}
 \end{aligned}$$

となる.

さらに出力について一様ならば,

$$C = \log_2 s + \sum_{j=1}^s p_{1j} \log_2 p_{1j}$$

となる. なぜならば,

$$\max_p H(Y) = -(q_1 \log_2 q_1 + \dots + q_s \log_2 q_s) \leq \log_2 s$$

等号が成立するのは, $q_1 = \dots = q_s = \frac{1}{s}$ のときである.

では, 実際に, そうなるときがあるか? 答えは, YES である. $p_1 = \dots = p_r = \frac{1}{r}$ のとき, $q_1 = \dots = q_s = \frac{1}{s}$ となる. なぜならば, 任意の j, k について,

$$q_j = \sum_{i=1}^r p(a_i)p(b_j|a_i) = \sum_{i=1}^r p_i p_{ij} = \sum_{i=1}^r \frac{1}{r} p_{ij} = \frac{1}{r} \sum_{i=1}^r p_{ij}$$

$$q_k = \sum_{i=1}^r p(a_i)p(b_k|a_i) = \frac{1}{r} \sum_{i=1}^r p_{ik}$$

となるが, $\{p_{1j}, \dots, p_{rj}\} = \{p_{1k}, \dots, p_{rk}\}$ であるので, $\sum_{i=1}^r p_{ij} = \sum_{i=1}^r p_{ik}$, すなわち $q_j = q_k = \frac{1}{s}$ が導かれる.

以上から, 入力について一様, かつ, 出力について一様 (2重に一様) な通信路の通信路容量 C は,

$$C = \log_2 s + \sum_{j=1}^s p_{1j} \log_2 p_{1j}$$

となる.

(1) BSC: $T = \begin{bmatrix} 1-p & p \\ p & 1-p \end{bmatrix}$ の通信路容量. 入力についても出力についても一様であるから,

$$C = \log_2 2 + \sum_{j=1}^2 p_{1j} \log_2 p_{1j} = 1 + p \log_2 p + (1-p) \log_2 (1-p) = 1 - \mathcal{H}(p)$$

となる.

(2) BSEC: $T = \begin{bmatrix} 1-p_X-p & p_X & p \\ p & p_X & 1-p_X-p \end{bmatrix}$ の通信路容量: 入力について一様であるので,

$$C = \max_p H(Y) + \sum_{j=1}^s p_{1j} \log_2 p_{1j}$$

$$= \max_p H(Y) + (1-p_X-p) \log_2 (1-p_X-p) + p_X \log_2 p_X + p \log_2 p$$

ここで,

$$H(Y) = -(q_0 \log_2 q_0 + q_X \log_2 q_X + q_1 \log_2 q_1)$$

である.

$H(Y)$ の最大値を求めてみよう. 入力で0の起きる確率を x , 1の起きる確率を y とすると, $x + y = 1$, $0 \leq \{x, y\} \leq 1$ であり, さらに

$$\begin{cases} q_0 = (1 - p_X - p)x + py \\ q_X = p_X x + p_X y = p_X \\ q_1 = (1 - p_X - p)y + px \end{cases}$$

であるので,

$$\begin{aligned} H(Y) &= -((1 - p_X - p)x + py) \log_2((1 - p_X - p)x + py) \\ &\quad - q_X \log_2 q_X \\ &\quad - ((1 - p_X - p)y + px) \log_2((1 - p_X - p)y + px) \end{aligned}$$

となる. そこでラグランジュの未定乗数法を用いて $x + y = 1$, $0 \leq \{x, y\} \leq 1$ という制約のもとで, $H(Y)$ を最大にする x と y の値を求めよう. そのためには,

$$\begin{aligned} J &= -((1 - p_X - p)x + py) \log_2((1 - p_X - p)x + py) - q_X \log_2 q_X \\ &\quad - ((1 - p_X - p)y + px) \log_2((1 - p_X - p)y + px) + \lambda(x + y - 1) \end{aligned}$$

と置いて,

$$\frac{\partial J}{\partial x} = \frac{\partial J}{\partial y} = \frac{\partial J}{\partial \lambda} = 0$$

を解く.

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial x} &= -(1 - p_X - p) \log_2((1 - p_X - p)x + py) - \frac{1 - p_X - p}{\ln 2} \\ &\quad - p \log_2((1 - p_X - p)y + px) - \frac{p}{\ln 2} + \lambda \\ \frac{\partial J}{\partial y} &= -p \log_2((1 - p_X - p)x + py) - \frac{p}{\ln 2} \\ &\quad - (1 - p_X - p) \log_2((1 - p_X - p)y + px) - \frac{1 - p_X - p}{\ln 2} + \lambda \\ \frac{\partial J}{\partial \lambda} &= x + y - 1 \end{aligned}$$

であるので,

$$\begin{aligned} &-(1 - p_X - p) \log_2((1 - p_X - p)x + py) - p \log_2((1 - p_X - p)y + px) \\ &= -p \log_2((1 - p_X - p)x + py) - (1 - p_X - p) \log_2((1 - p_X - p)y + px) \end{aligned}$$

となる. つまり,

$$(1 - p_X - 2p)(\log_2((1 - p_X - p)y + px) - \log_2((1 - p_X - p)x + py)) = 0$$

$1 - p_X - 2p \neq 0$ となるように通信路パラメタが設定されている (=通信路容量が0でない)

ときは,

$$\log_2((1-p_X-p)y+px) = \log_2((1-p_X-p)x+py)$$

から,

$$(1-p_X-p)y+px = (1-p_X-p)x+py$$

となり,

$$(1-p_X-2p)(x-y) = 0$$

から,

$$x = y$$

が導かれる.

ここで, $x+y=1$ だから $x=y=\frac{1}{2}$, $q_0=q_1=\frac{1-p_X}{2}$ となるので,

$$\max_{x+y=1, 0 \leq x, y \leq 1} H(Y) = -\left(p_X \log_2 p_X + (1-p_X) \log_2 \frac{1-p_X}{2}\right)$$

が得られる. 従って,

$$\begin{aligned} C &= -\left(p_X \log_2 p_X + (1-p_X) \log_2 \frac{1-p_X}{2}\right) \\ &\quad + (1-p_X-p) \log_2(1-p_X-p) + p_X \log_2 p_X + p \log_2 p \\ &= (1-p_X)(1 - \log_2(1-p_X)) + (1-p_X-p) \log_2(1-p_X-p) + p \log_2 p \\ &= 1-p_X + p \log_2 \frac{p}{1-p_X} + (1-p_X-p) \log_2 \frac{1-p_X-p}{1-p_X} \\ &= (1-p_X) \left(1 + \frac{p}{1-p_X} \log_2 \frac{p}{1-p_X} + \left(1 - \frac{p}{1-p_X}\right) \log_2 \left(1 - \frac{p}{1-p_X}\right)\right) \\ &= (1-p_X) \left(1 - \mathcal{H}\left(\frac{p}{1-p_X}\right)\right) \end{aligned}$$

となる. ■

つまり, ビット誤り率 p , 消失率 p_X の BSEC の通信路容量は, ビット誤り率が $\frac{p}{1-p_X}$ の2元対称通信路の通信路容量に $(1-p_X)$ を掛けたものであることがわかった.

※ $0 \leq \{p_X, p\} \leq 1$ で, $0 \leq 1-p_X-p$ と仮定しているので $0 \leq \frac{p}{1-p_X} \leq 1$ である.

8.3 BSC を直列・並列接続する場合

(1) 直列接続された BSC の通信路容量

誤り率 p と q の BSC を直列接続したときの通信路の通信路行列は,

$$\begin{bmatrix} 1-p & p \\ p & 1-p \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1-q & q \\ q & 1-q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-p-q+2pq & p+q-2pq \\ p+q-2pq & 1-p-q+2pq \end{bmatrix}$$

となり, これも BSC である (誤り率は $p+q-2pq$). 誤り率 p の BSC の通信路容量は $1-\mathcal{H}(p)$ であるので,

$$C = 1 - \mathcal{H}(p+q-2pq) = 1 - \mathcal{H}(1-(p+q-2pq)) = 1 - \mathcal{H}(1-p-q+2pq)$$

となる.

(2) 並列接続された BSC の通信路容量

誤り率 p と q の BSC を並列接続したときの通信路は図 3 のようになる.

この通信路の入力, 出力アルファベットは, $\{00,01,10,11\}$ であり, 通信路行列は,

$$\begin{bmatrix} (1-p)(1-q) & (1-p)q & p(1-q) & pq \\ (1-p)q & (q-p)(1-q) & pq & p(1-q) \\ p(1-q) & pq & (1-p)(1-q) & (1-p)q \\ pq & p(1-q) & (1-p)q & (1-p)(1-q) \end{bmatrix}$$

となる. この通信路は 2 重に一様であり, その通信路容量は,

$$\begin{aligned} C &= \log_2 4 + \sum_{j=1}^4 p_{1j} \log_2 p_{1j} \\ &= 2 + \bar{p}\bar{q}\log_2(\bar{p}\bar{q}) + \bar{p}q\log_2(\bar{p}q) + p\bar{q}\log_2(p\bar{q}) + pq\log_2(pq) \\ &= 2 + \bar{p}\bar{q}(\log_2\bar{p} + \log_2\bar{q}) + \bar{p}q(\log_2\bar{p} + \log_2q) \\ &\quad + p\bar{q}(\log_2p + \log_2\bar{q}) + pq(\log_2p + \log_2q) \\ &= 2 + p\log_2p + \bar{p}\log_2\bar{p} + q\log_2q + \bar{q}\log_2\bar{q} \\ &= 2 - \mathcal{H}(p) - \mathcal{H}(q) \end{aligned}$$

となる. すなわち, 並列接続された BSC の通信路容量は, それぞれの BSC の通信路容量の和に等しい:

$$C = 2 - \mathcal{H}(p) - \mathcal{H}(q) = (1 - \mathcal{H}(p)) + (1 - \mathcal{H}(q))$$

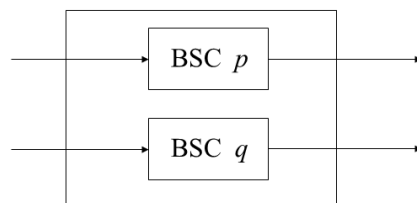


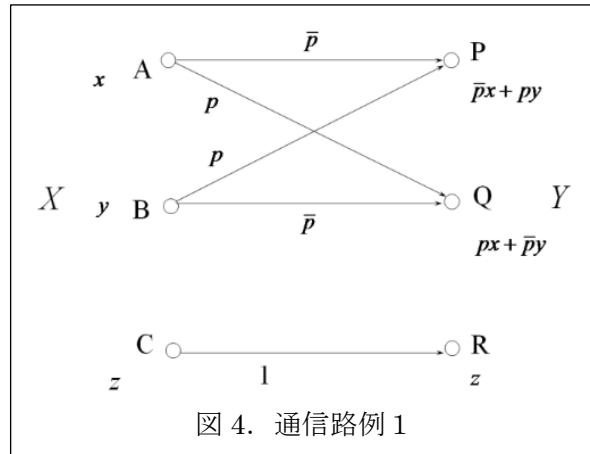
図 3. 誤り率 p と q の BSC を並列接続した通信路

8.4 記憶のない非一様通信路の通信路容量

(1) 次の通信路行列：

$$T = \begin{bmatrix} \bar{p} & p & 0 \\ p & \bar{p} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

で規定される通信路 (図 4) の通信路容量を求めてみよう．ただし $\bar{p} \triangleq 1 - p$ とする．



解：A, B, Cの生起確率を x, y, z としよう．すると，

$$0 \leq \{x, y, z\} \leq 1, x + y + z = 1$$

また， X と Y の相互情報量については，

$$H(Y) = (\bar{p}x + py) \log_2 \frac{1}{\bar{p}x + py} + (\bar{p}y + px) \log_2 \frac{1}{px + \bar{p}y} + z \log_2 \frac{1}{z}$$

$$H(Y|X) = x\mathcal{H}(p) + y\mathcal{H}(\bar{p}) + z\mathcal{H}(0) = (x + y)\mathcal{H}(p)$$

より，

$$I(X; Y) = H(Y) - H(Y|X)$$

$$= (\bar{p}x + py) \log_2 \frac{1}{\bar{p}x + py} + (\bar{p}y + px) \log_2 \frac{1}{px + \bar{p}y} + z \log_2 \frac{1}{z} - (x + y)\mathcal{H}(p)$$

となる．

$x + y + z = 1$ という条件のもとで，上の値を最大化する．ラグランジュの未定乗数法を使う．つまり，

$$J = I(X; Y) + \lambda(x + y + z - 1)$$

とにおいて，連立方程式

$$\frac{\partial J}{\partial x} = \frac{\partial J}{\partial y} = \frac{\partial J}{\partial z} = \frac{\partial J}{\partial \lambda} = 0$$

を解く．

$$\begin{cases} \bar{p} \log_2 \frac{1}{\bar{p}x + py} + p \log_2 \frac{1}{px + \bar{p}y} - \frac{1}{\ln 2} - \mathcal{H}(p) + \lambda = 0 \\ p \log_2 \frac{1}{\bar{p}x + py} + \bar{p} \log_2 \frac{1}{px + \bar{p}y} - \frac{1}{\ln 2} - \mathcal{H}(p) + \lambda = 0 \\ \log_2 \frac{1}{z} - \frac{1}{\ln 2} - \lambda = 0 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

第1式と第2式から

$$\log_2 \frac{1}{\bar{p}x + py} = \log_2 \frac{1}{px + \bar{p}y}$$

従って, $(1 - 2p)x = (1 - 2p)y$, ゆえに

$$x = y$$

が得られる. これを再び第1式に代入して,

$$\lambda = \mathcal{H}(p) + \frac{1}{\ln 2} + \log_2 x$$

一方, 第4式に $x = y$ を適用して得られる $z = 1 - 2x$ を第3式に代入すると,

$$\lambda = \frac{1}{\ln 2} + \log_2(1 - 2x)$$

が得られるので,

$$\mathcal{H}(p) + \frac{1}{\ln 2} + \log_2 x = \frac{1}{\ln 2} + \log_2(1 - 2x)$$

これを x について解く. $\mathcal{H}(p) = \log_2 \frac{1-2x}{x}$ から,

$$x = \frac{1}{2^{\mathcal{H}(p)} + 2}$$

が得られ, さらに,

$$y = \frac{1}{2^{\mathcal{H}(p)} + 2}$$

$$z = 1 - \frac{2}{2^{\mathcal{H}(p)} + 2} = \frac{2^{\mathcal{H}(p)}}{2^{\mathcal{H}(p)} + 2}$$

が得られる. このとき $I(X; Y)$ が最大値をとる. そのとき

$$x - px + py = y - py + px = \frac{1}{2^{\mathcal{H}(p)} + 2}$$

から,

$$x + y = \frac{2^{\mathcal{H}(p)}}{2^{\mathcal{H}(p)} + 2}$$

であるから,

$$\begin{aligned}
 I(X; Y) &= \frac{2}{2^{\mathcal{H}(p)} + 2} \log_2(2^{\mathcal{H}(p)} + 2) + \frac{2^{\mathcal{H}(p)}}{2^{\mathcal{H}(p)} + 2} \log_2 \frac{2^{\mathcal{H}(p)} + 2}{2^{\mathcal{H}(p)}} - \frac{2\mathcal{H}(p)}{2^{\mathcal{H}(p)} + 2} \\
 &= \log_2(2^{\mathcal{H}(p)} + 2) - \frac{2^{\mathcal{H}(p)}\mathcal{H}(p)}{2^{\mathcal{H}(p)} + 2} - \frac{2\mathcal{H}(p)}{2^{\mathcal{H}(p)} + 2} \\
 &= \log_2(2^{\mathcal{H}(p)} + 2) - \mathcal{H}(p) \\
 &= \log_2(2^{\mathcal{H}(p)} + 2) - \log_2 2^{\mathcal{H}(p)} \\
 &= \log_2 \frac{2^{\mathcal{H}(p)} + 2}{2^{\mathcal{H}(p)}} \\
 &= \log_2(1 + 2^{1-\mathcal{H}(p)})
 \end{aligned}$$

■

(2) 次の通信路行列：

$$\begin{bmatrix} \bar{p} & p & & \\ p & \bar{p} & & \\ & & \bar{q} & q \\ & & q & \bar{q} \end{bmatrix}$$

で規定される通信路の通信路容量を求め
てみよう。ただし、 $\bar{p} \triangleq 1 - p, \bar{q} \triangleq 1 - q$ と
する。

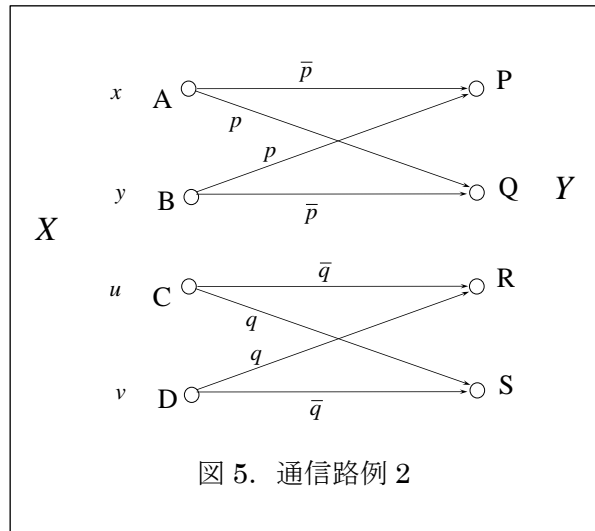


図 5. 通信路例 2

解：A, B, C, Dの生起確率を x, y, u, v とする。そのときの出力確率分布は

$$\bar{p}x + py, px + \bar{p}y, \bar{q}u + qv, qu + \bar{q}v$$

となる。このとき、

$$\begin{aligned}
 H(Y) &= (\bar{p}x + py) \log_2 \frac{1}{\bar{p}x + py} + (px + \bar{p}y) \log_2 \frac{1}{px + \bar{p}y} \\
 &\quad + (\bar{q}u + qv) \log_2 \frac{1}{\bar{q}u + qv} + (qu + \bar{q}v) \log_2 \frac{1}{qu + \bar{q}v}
 \end{aligned}$$

$$H(Y|X) = (x + y)\mathcal{H}(p) + (u + v)\mathcal{H}(q)$$

である。ラグランジュの未定乗数法を使って、 X と Y の間の相互情報量： $I(X; Y) = H(Y) - H(Y|X)$ の最大値を求めよう。

$$\begin{aligned}
 J &= (\bar{p}x + py) \log_2 \frac{1}{\bar{p}x + py} + (px + \bar{p}y) \log_2 \frac{1}{px + \bar{p}y} \\
 &\quad + (\bar{q}u + qv) \log_2 \frac{1}{\bar{q}u + qv} + (qu + \bar{q}v) \log_2 \frac{1}{qu + \bar{q}v} \\
 &\quad - ((x + y)\mathcal{H}(p) + (u + v)\mathcal{H}(q)) + \lambda(x + y + u + v)
 \end{aligned}$$

とすれば,

$$\frac{\partial J}{\partial x} = -\left(\bar{p} \log_2(\bar{p}x + py) + \frac{\bar{p}}{\ln 2} + p \log_2(px + \bar{p}y) + \frac{p}{\ln 2}\right) - \mathcal{H}(p) + \lambda = 0$$

$$\frac{\partial J}{\partial y} = -\left(p \log_2(\bar{p}x + py) + \frac{p}{\ln 2} + \bar{p} \log_2(px + \bar{p}y) + \frac{\bar{p}}{\ln 2}\right) - \mathcal{H}(p) + \lambda = 0$$

$$\frac{\partial J}{\partial u} = -\left(\bar{q} \log_2(\bar{q}u + qv) + \frac{\bar{q}}{\ln 2} + q \log_2(qu + \bar{q}v) + \frac{q}{\ln 2}\right) - \mathcal{H}(q) + \lambda = 0$$

$$\frac{\partial J}{\partial v} = -\left(q \log_2(\bar{q}u + qv) + \frac{q}{\ln 2} + \bar{q} \log_2(qu + \bar{q}v) + \frac{\bar{q}}{\ln 2}\right) - \mathcal{H}(q) + \lambda = 0$$

$$x + y + u + v = 1$$

ゆえに,

$$x = y, u = v$$

これらを第2式, 第4式に代入すると,

$$-\log_2 x - \frac{1}{\ln 2} - \mathcal{H}(p) + \lambda = 0$$

$$-\log_2 u - \frac{1}{\ln 2} - \mathcal{H}(q) + \lambda = 0$$

従って,

$$\log_2 x + \mathcal{H}(p) = \log_2 u + \mathcal{H}(q)$$

$$\frac{x}{u} = 2^{\mathcal{H}(q) - \mathcal{H}(p)}$$

となる, これらを第5式に代入して,

$$x + x + 2^{\mathcal{H}(p) - \mathcal{H}(q)}x + 2^{\mathcal{H}(p) - \mathcal{H}(q)}x = 1$$

ゆえに,

$$x = \frac{1}{2(1 + 2^{\mathcal{H}(p) - \mathcal{H}(q)})}$$

$$u = \frac{2^{\mathcal{H}(p) - \mathcal{H}(q)}}{2(1 + 2^{\mathcal{H}(p) - \mathcal{H}(q)})}$$

となり,

$$\begin{aligned}
I(X; Y) &= H(Y) - H(Y|X) \\
&= \frac{1}{1 + 2^{\mathcal{H}(p) - \mathcal{H}(q)}} \log_2(2(1 + 2^{\mathcal{H}(p) - \mathcal{H}(q)})) \\
&\quad + \frac{2^{\mathcal{H}(p) - \mathcal{H}(q)}}{1 + 2^{\mathcal{H}(p) - \mathcal{H}(q)}} \log_2 \frac{2(1 + 2^{\mathcal{H}(p) - \mathcal{H}(q)})}{2^{\mathcal{H}(p) - \mathcal{H}(q)}} \\
&\quad - \frac{1}{1 + 2^{\mathcal{H}(p) - \mathcal{H}(q)}} \mathcal{H}(p) - \frac{2^{\mathcal{H}(p) - \mathcal{H}(q)}}{1 + 2^{\mathcal{H}(p) - \mathcal{H}(q)}} \mathcal{H}(q) \\
&= \frac{1}{1 + 2^{\mathcal{H}(p) - \mathcal{H}(q)}} (\log_2(1 + 2^{\mathcal{H}(p) - \mathcal{H}(q)}) + 1) \\
&\quad + \frac{2^{\mathcal{H}(p) - \mathcal{H}(q)}}{1 + 2^{\mathcal{H}(p) - \mathcal{H}(q)}} \left(\log_2 \frac{1 + 2^{\mathcal{H}(p) - \mathcal{H}(q)}}{2^{\mathcal{H}(p) - \mathcal{H}(q)}} + 1 \right) \\
&\quad - \frac{1}{1 + 2^{\mathcal{H}(p) - \mathcal{H}(q)}} \mathcal{H}(p) - \frac{2^{\mathcal{H}(p) - \mathcal{H}(q)}}{1 + 2^{\mathcal{H}(p) - \mathcal{H}(q)}} \mathcal{H}(q) \\
&= 1 + \frac{1}{1 + 2^{\mathcal{H}(p) - \mathcal{H}(q)}} \log_2(1 + 2^{\mathcal{H}(p) - \mathcal{H}(q)}) \\
&\quad + \frac{2^{\mathcal{H}(p) - \mathcal{H}(q)}}{1 + 2^{\mathcal{H}(p) - \mathcal{H}(q)}} \left(\log_2(1 + 2^{\mathcal{H}(p) - \mathcal{H}(q)}) - (\mathcal{H}(p) - \mathcal{H}(q)) \right) \\
&\quad - \frac{1}{1 + 2^{\mathcal{H}(p) - \mathcal{H}(q)}} \mathcal{H}(p) - \frac{2^{\mathcal{H}(p) - \mathcal{H}(q)}}{1 + 2^{\mathcal{H}(p) - \mathcal{H}(q)}} \mathcal{H}(q) \\
&= 1 + \log_2(1 + 2^{\mathcal{H}(p) - \mathcal{H}(q)}) \\
&\quad - \frac{2^{\mathcal{H}(p) - \mathcal{H}(q)}}{1 + 2^{\mathcal{H}(p) - \mathcal{H}(q)}} \mathcal{H}(p) + \frac{2^{\mathcal{H}(p) - \mathcal{H}(q)}}{1 + 2^{\mathcal{H}(p) - \mathcal{H}(q)}} \mathcal{H}(q) \\
&\quad - \frac{1}{1 + 2^{\mathcal{H}(p) - \mathcal{H}(q)}} \mathcal{H}(p) - \frac{2^{\mathcal{H}(p) - \mathcal{H}(q)}}{1 + 2^{\mathcal{H}(p) - \mathcal{H}(q)}} \mathcal{H}(q) \\
&= 1 + \log_2(1 + 2^{\mathcal{H}(p) - \mathcal{H}(q)}) - \mathcal{H}(p) \\
&= \log_2(1 + 2^{\mathcal{H}(p) - \mathcal{H}(q)}) + \log_2 2^{1 - \mathcal{H}(p)} \\
&= \log_2(2^{1 - \mathcal{H}(p)} + 2^{1 - \mathcal{H}(q)})
\end{aligned}$$

が得られる. ■

(2)は並列接続された BSC に似ている. 実際, 通信路容量を p, q の関数として描いてみると, 図 6 のようになる. 実際, 通信路行列を見れば, (2)の方が, クロストークが少ないことが分かる. 典型的なケースについては, 表 1 参照.

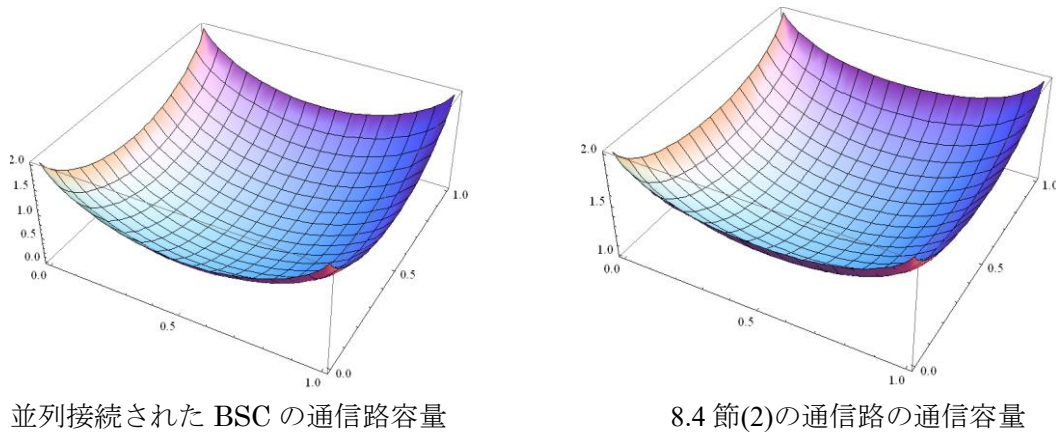


図 6. 並列接続 BSC と通信路例 2 の通信路容量

表 1. 並列接続 BSC と通信路例 2 の通信路容量の比較

通信路	$p = q = 0$ のときの通信路容量	$p = 0, q = \frac{1}{2}$ のときの通信路容量
並列接続 BSC	2	1
通信路例(2)	2	$\log_2 3$

8.5 記憶のない2元定常通信路一般の場合—定性解

通信路行列 $T = \begin{bmatrix} \bar{p} & p \\ q & \bar{q} \end{bmatrix}$ で規定される記憶

のない2元定常通信路一般 (図 6) の通信路容量 C について検討してみよう.

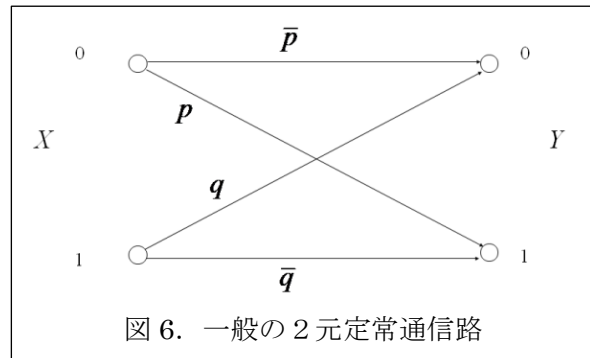


図 6. 一般の 2 元定常通信路

(1) 以下では、通信路容量の定義

$$C = \max_p [I(X; Y)] = \max_p [H(Y) - H(Y|X)]$$

に従って、 C の値を推定することとする.

(2) 出力アルファベット1の発生確率を y とすると、出力側のエントロピーを $H(Y)$ とすると、

$$H(Y) = -(y \log_2 y + (1 - y) \log_2 (1 - y))$$

となる.

(3) 一方、入力アルファベット1の発生確率を x とすると、

$$y = (1 - x)p + x\bar{q}$$

である. x が0から1の間を動くに従い、 y は p から \bar{q} までの間を動く. また、

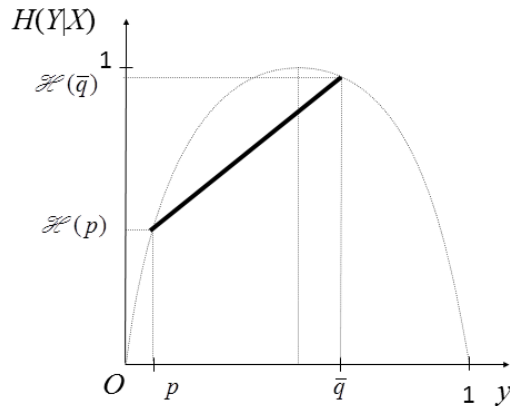


図 7. $p \leq y \leq \bar{q}$ のとき, $H(Y|X)$ は $\mathcal{H}(p)$ から $\mathcal{H}(\bar{q})$ までを直線的に変化する

$$x = \frac{y - p}{\bar{q} - p}$$

である.

(4) この通信路の条件付エントロピー $H(Y|X)$ と相互情報量 $I(X; Y)$ を求める.

$$H(Y|X) = (1 - x)\mathcal{H}(p) + x\mathcal{H}(\bar{q})$$

であるが, (3) より, $x = \frac{y - p}{\bar{q} - p}$ であるので, これを代入して,

$$H(Y|X) = \left(1 - \frac{y - p}{\bar{q} - p}\right)\mathcal{H}(p) + \frac{y - p}{\bar{q} - p}\mathcal{H}(\bar{q}) = \frac{\bar{q} - y}{\bar{q} - p}\mathcal{H}(p) + \frac{y - p}{\bar{q} - p}\mathcal{H}(\bar{q})$$

を得る.

y が p から \bar{q} までの間を動くにつれて, $H(Y|X)$ は $\mathcal{H}(p)$ から $\mathcal{H}(\bar{q})$ までを直線的に変化する (図 7). 従って,

$$I(X; Y) = H(Y) - H(Y|X) = \mathcal{H}(y) - \left(\frac{\bar{q} - y}{\bar{q} - p}\mathcal{H}(p) + \frac{y - p}{\bar{q} - p}\mathcal{H}(\bar{q})\right)$$

となる.

ここで, $p < \bar{q}$ とすれば, $I(X; Y)$ は概ね図 8 のような関数であることがわかる (そうでない場合は, p と \bar{q} を入れ替えれば同じ議論となる). 図 8 から明らかなように, $I(X; Y)$ のグラフの形状は上に凸であり, $p \leq y_{\max} \leq \bar{q}$ となるある y_{\max} に対して最大値:

$$\mathcal{H}(y_{\max}) - \left(\frac{\bar{q} - y_{\max}}{\bar{q} - p}\mathcal{H}(p) + \frac{y_{\max} - p}{\bar{q} - p}\mathcal{H}(\bar{q})\right)$$

をとる. この値が求める通信路容量である.

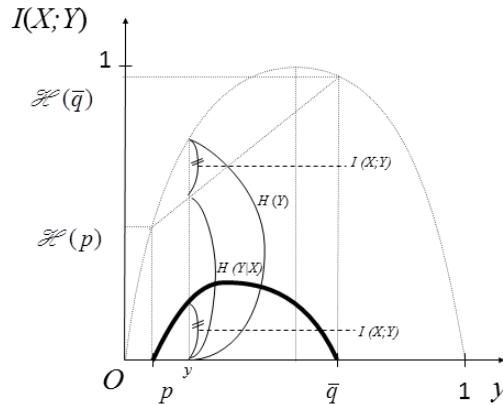


図 8. $I(X;Y)$ の概形. ただし, $p < \bar{q}$ と仮定.

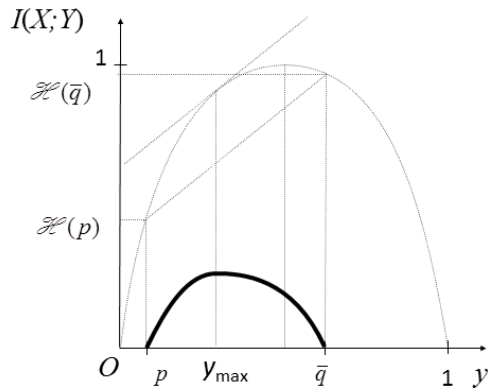


図 9. y_{\max} の値は, $(p, \mathcal{H}(p))$ と $(\bar{q}, \mathcal{H}(\bar{q}))$ を結ぶ線分と同じ傾きを持つ直線がエントロピー関数 $\mathcal{H}(y)$ と接する点の横軸座標値である.

図 9 が示唆するように, y_{\max} の値は, $(p, \mathcal{H}(p))$ と $(\bar{q}, \mathcal{H}(\bar{q}))$ を結ぶ線分と同じ傾きを持つ直線がエントロピー関数 $\mathcal{H}(y)$ と接する点の横軸座標値である.

さて, q の値を固定したまま, p の値を0から1まで変えてみよう. この通信路の通信路容量が p の値によってどのように変化するかを, p を横軸, 通信路容量を縦軸とする2次元平面上で表してみると図 10 のようになる.

このように, 通信路容量はパラメータ p の下に凸な関数であり, $p = \bar{q}$ のとき通信路容量は最小値0を, $p = 0$ または1のとき最大値をとる.

$p = \bar{q}$ のとき (図 11) は, 通信路容量は0になる. 出力アルファベット1の生起確率 y について

$$y = p(1 - x) + px = p$$

となり, 入力アルファベットの生起確率 x に関係なく決まる, すなわち, 入力情報が出力に全く伝わらないという状況に対応している.

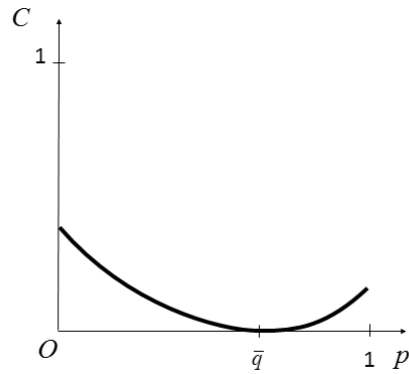


図 10. q の値が与えられたときの図 6 の通信路の通信路容量

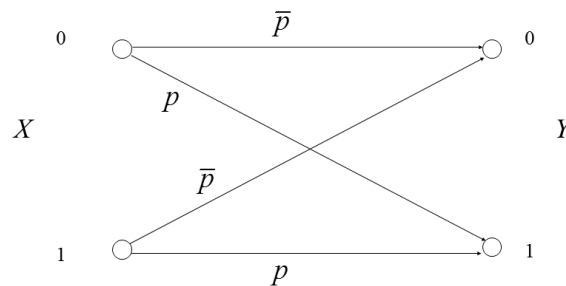


図 11. 図 6 の通信路の通信路容量が0になる場合.

8.6 記憶のない2元定常通信路一般の場合—定量解

今度は、通信路行列 $T = \begin{bmatrix} \bar{p} & p \\ q & \bar{q} \end{bmatrix}$ で規定される記憶のない2元定常通信路の通信路容量 C を定量的に求めよう。ただし、 $\bar{p} \triangleq 1 - p$, $\bar{q} = 1 - q$ とする。
通信路容量の定義により、

$$C = \max_p [I(X; Y)] = \max_p [H(Y) - H(Y|X)]$$

出力アルファベット1の生起確率を y とすると、出力側のエントロピーを $H(Y)$ とすると、

$$H(Y) = -(y \log_2 y + (1 - y) \log_2 (1 - y))$$

となる。入力シンボルの生起確率を x, y とする。すると、

$$0 \leq \{x, y\} \leq 1, x + y = 1$$

また、

$$H(Y|X) = x\mathcal{H}(p) + y\mathcal{H}(q)$$

$$H(Y) = -(\bar{p}x + qy) \log_2(\bar{p}x + qy) - (px + \bar{q}y) \log_2(px + \bar{q}y)$$

となるので,

$$I(X;Y) = -(\bar{p}x + qy) \log_2(\bar{p}x + qy) - (px + \bar{q}y) \log_2(px + \bar{q}y) - x\mathcal{H}(p) - y\mathcal{H}(q)$$

ラグランジュの未定乗数法により,

$$J = I(X;Y) - \lambda(x + y - 1)$$

$$= -(\bar{p}x + qy) \log_2(\bar{p}x + qy) - (px + \bar{q}y) \log_2(px + \bar{q}y) - x\mathcal{H}(p) - y\mathcal{H}(q) - \lambda(x + y - 1)$$

と置いて,

$$\frac{\partial J}{\partial x} = \frac{\partial J}{\partial y} = \frac{\partial J}{\partial \lambda} = 0$$

を満たす x, y を探す.

$$\frac{\partial J}{\partial x} = -\frac{\bar{p}}{\ln 2} \ln(\bar{p}x + qy) - \frac{\bar{p}}{\ln 2} - \frac{p}{\ln 2} \ln(px + \bar{q}y) - \frac{p}{\ln 2} - \mathcal{H}(p) - \lambda$$

$$\frac{\partial J}{\partial y} = -\frac{q}{\ln 2} \ln(\bar{p}x + qy) - \frac{q}{\ln 2} - \frac{\bar{q}}{\ln 2} \ln(px + \bar{q}y) - \frac{\bar{q}}{\ln 2} - \mathcal{H}(q) - \lambda$$

$$x + y - 1 = 0$$

はじめの2つの式から

$$(q - \bar{p})(\log_2(\bar{p}x + qy) - \log_2(px + \bar{q}y)) = \mathcal{H}(p) - \mathcal{H}(q)$$

$$\log_2 \frac{\bar{p}x + qy}{px + \bar{q}y} = \frac{\mathcal{H}(p) - \mathcal{H}(q)}{q - \bar{p}}$$

$$\frac{\bar{p}x + qy}{px + \bar{q}y} = 2^{\frac{\mathcal{H}(p) - \mathcal{H}(q)}{q - \bar{p}}}$$

$$px 2^{\frac{\mathcal{H}(p) - \mathcal{H}(q)}{q - \bar{p}}} + \bar{q}y 2^{\frac{\mathcal{H}(p) - \mathcal{H}(q)}{q - \bar{p}}} = \bar{p}x + qy$$

$$\left(p 2^{\frac{\mathcal{H}(p) - \mathcal{H}(q)}{q - \bar{p}}} - \bar{p} \right) x = \left(q - \bar{q} 2^{\frac{\mathcal{H}(p) - \mathcal{H}(q)}{q - \bar{p}}} \right) y$$

となるので

$$x = \frac{q - \bar{q} 2^{\frac{\mathcal{H}(p) - \mathcal{H}(q)}{q - \bar{p}}}}{(p - \bar{q}) \left(2^{\frac{\mathcal{H}(p) - \mathcal{H}(q)}{q - \bar{p}}} + 1 \right)}, y = \frac{p 2^{\frac{\mathcal{H}(p) - \mathcal{H}(q)}{q - \bar{p}}} - \bar{p}}{(p - \bar{q}) \left(2^{\frac{\mathcal{H}(p) - \mathcal{H}(q)}{q - \bar{p}}} + 1 \right)}$$

が得られる. そのとき,

$$\begin{aligned}
\bar{p}x + qy &= \frac{\bar{p} \left(q - \bar{q} 2^{\frac{\mathcal{H}(p) - \mathcal{H}(q)}{q - \bar{p}}} \right)}{(p - \bar{q}) \left(2^{\frac{\mathcal{H}(p) - \mathcal{H}(q)}{q - \bar{p}}} + 1 \right)} + \frac{q \left(p 2^{\frac{\mathcal{H}(p) - \mathcal{H}(q)}{q - \bar{p}}} - \bar{p} \right)}{(p - \bar{q}) \left(2^{\frac{\mathcal{H}(p) - \mathcal{H}(q)}{q - \bar{p}}} + 1 \right)} \\
&= \frac{(p - \bar{q}) 2^{\frac{\mathcal{H}(p) - \mathcal{H}(q)}{q - \bar{p}}}}{(p - \bar{q}) \left(2^{\frac{\mathcal{H}(p) - \mathcal{H}(q)}{q - \bar{p}}} + 1 \right)} \\
&= \frac{2^{\frac{\mathcal{H}(p) - \mathcal{H}(q)}{q - \bar{p}}}}{2^{\frac{\mathcal{H}(p) - \mathcal{H}(q)}{q - \bar{p}}} + 1}
\end{aligned}$$

また,

$$\begin{aligned}
px + \bar{q}y &= \frac{p \left(q - \bar{q} 2^{\frac{\mathcal{H}(p) - \mathcal{H}(q)}{q - \bar{p}}} \right)}{(p - \bar{q}) \left(2^{\frac{\mathcal{H}(p) - \mathcal{H}(q)}{q - \bar{p}}} + 1 \right)} + \frac{\bar{q} \left(p 2^{\frac{\mathcal{H}(p) - \mathcal{H}(q)}{q - \bar{p}}} - \bar{p} \right)}{(p - \bar{q}) \left(2^{\frac{\mathcal{H}(p) - \mathcal{H}(q)}{q - \bar{p}}} + 1 \right)} \\
&= \frac{p - \bar{q}}{(p - \bar{q}) \left(2^{\frac{\mathcal{H}(p) - \mathcal{H}(q)}{q - \bar{p}}} + 1 \right)} \\
&= \frac{1}{2^{\frac{\mathcal{H}(p) - \mathcal{H}(q)}{q - \bar{p}}} + 1}
\end{aligned}$$

であるので, 通信路容量は上記の値を使って,

$$\begin{aligned}
C &= -(\bar{p}x + qy) \log_2(\bar{p}x + qy) - (px + \bar{q}y) \log_2(px + \bar{q}y) - x\mathcal{H}(p) - y\mathcal{H}(q) \\
&= \mathcal{H} \left(\frac{1}{2^{\frac{\mathcal{H}(p) - \mathcal{H}(q)}{q - \bar{p}}} + 1} \right) - \frac{\mathcal{H}(p) \left(q - \bar{q} 2^{\frac{\mathcal{H}(p) - \mathcal{H}(q)}{q - \bar{p}}} \right)}{(q - \bar{p}) \left(2^{\frac{\mathcal{H}(p) - \mathcal{H}(q)}{q - \bar{p}}} + 1 \right)} - \frac{\mathcal{H}(q) \left(p 2^{\frac{\mathcal{H}(p) - \mathcal{H}(q)}{q - \bar{p}}} - \bar{p} \right)}{(q - \bar{p}) \left(2^{\frac{\mathcal{H}(p) - \mathcal{H}(q)}{q - \bar{p}}} + 1 \right)}
\end{aligned}$$

もう少し右辺を整理すると,

$$\begin{aligned}
 \mathcal{H}\left(\frac{1}{2^{\frac{\mathcal{H}(p)-\mathcal{H}(q)}{q-\bar{p}}+1}}\right) &= -\frac{1}{2^{\frac{\mathcal{H}(p)-\mathcal{H}(q)}{q-\bar{p}}+1}} \log_2\left(\frac{1}{2^{\frac{\mathcal{H}(p)-\mathcal{H}(q)}{q-\bar{p}}+1}}\right) \\
 &\quad -\frac{\frac{\mathcal{H}(p)-\mathcal{H}(q)}{2^{\frac{\mathcal{H}(p)-\mathcal{H}(q)}{q-\bar{p}}}}}{2^{\frac{\mathcal{H}(p)-\mathcal{H}(q)}{q-\bar{p}}+1}} \log_2\left(\frac{\frac{\mathcal{H}(p)-\mathcal{H}(q)}{2^{\frac{\mathcal{H}(p)-\mathcal{H}(q)}{q-\bar{p}}}}}{2^{\frac{\mathcal{H}(p)-\mathcal{H}(q)}{q-\bar{p}}+1}}}\right) \\
 &= \frac{1}{2^{\frac{\mathcal{H}(p)-\mathcal{H}(q)}{q-\bar{p}}+1}} \log_2\left(2^{\frac{\mathcal{H}(p)-\mathcal{H}(q)}{q-\bar{p}}+1}\right) \\
 &\quad +\frac{\frac{\mathcal{H}(p)-\mathcal{H}(q)}{2^{\frac{\mathcal{H}(p)-\mathcal{H}(q)}{q-\bar{p}}}}}{2^{\frac{\mathcal{H}(p)-\mathcal{H}(q)}{q-\bar{p}}+1}} \log_2\left(2^{\frac{\mathcal{H}(p)-\mathcal{H}(q)}{q-\bar{p}}+1}\right) \\
 &\quad -\frac{\frac{\mathcal{H}(p)-\mathcal{H}(q)}{2^{\frac{\mathcal{H}(p)-\mathcal{H}(q)}{q-\bar{p}}}}}{2^{\frac{\mathcal{H}(p)-\mathcal{H}(q)}{q-\bar{p}}+1}} \cdot \frac{\mathcal{H}(p)-\mathcal{H}(q)}{q-\bar{p}} \\
 &= \log_2\left(2^{\frac{\mathcal{H}(p)-\mathcal{H}(q)}{q-\bar{p}}+1}\right) - \frac{2^{\frac{\mathcal{H}(p)-\mathcal{H}(q)}{q-\bar{p}}}}{2^{\frac{\mathcal{H}(p)-\mathcal{H}(q)}{q-\bar{p}}+1}} \cdot \frac{\mathcal{H}(p)-\mathcal{H}(q)}{q-\bar{p}}
 \end{aligned}$$

であるので

$$\begin{aligned}
 C &= \log_2\left(2^{\frac{\mathcal{H}(p)-\mathcal{H}(q)}{q-\bar{p}}+1}\right) - \frac{2^{\frac{\mathcal{H}(p)-\mathcal{H}(q)}{q-\bar{p}}}}{2^{\frac{\mathcal{H}(p)-\mathcal{H}(q)}{q-\bar{p}}+1}} \cdot \frac{\mathcal{H}(p)-\mathcal{H}(q)}{q-\bar{p}} \\
 &\quad -\frac{\mathcal{H}(p)\left(q-\bar{q}2^{\frac{\mathcal{H}(p)-\mathcal{H}(q)}{q-\bar{p}}}\right)}{(q-\bar{p})\left(2^{\frac{\mathcal{H}(p)-\mathcal{H}(q)}{q-\bar{p}}+1}\right)} - \frac{\mathcal{H}(q)\left(p2^{\frac{\mathcal{H}(p)-\mathcal{H}(q)}{q-\bar{p}}}-\bar{p}\right)}{(q-\bar{p})\left(2^{\frac{\mathcal{H}(p)-\mathcal{H}(q)}{q-\bar{p}}+1}\right)} \\
 &= \log_2\left(2^{\frac{\mathcal{H}(p)-\mathcal{H}(q)}{q-\bar{p}}+1}\right) \\
 &\quad +\frac{\mathcal{H}(p)\left(-q-(1-\bar{q})2^{\frac{\mathcal{H}(p)-\mathcal{H}(q)}{q-\bar{p}}}\right)}{(q-\bar{p})\left(2^{\frac{\mathcal{H}(p)-\mathcal{H}(q)}{q-\bar{p}}+1}\right)} + \frac{\mathcal{H}(q)\left((1-p)2^{\frac{\mathcal{H}(p)-\mathcal{H}(q)}{q-\bar{p}}+1}+\bar{p}\right)}{(q-\bar{p})\left(2^{\frac{\mathcal{H}(p)-\mathcal{H}(q)}{q-\bar{p}}+1}\right)} \\
 &= \log_2\left(2^{\frac{\mathcal{H}(p)-\mathcal{H}(q)}{q-\bar{p}}+1}\right) - \frac{q\mathcal{H}(p)}{(q-\bar{p})} + \frac{\bar{p}\mathcal{H}(q)}{(q-\bar{p})} \\
 &= \log_2\left(2^{\frac{\mathcal{H}(p)-\mathcal{H}(q)}{q-\bar{p}}+1}\right) 2^{\frac{-q\mathcal{H}(p)+\bar{p}\mathcal{H}(q)}{q-\bar{p}}} \\
 &= \log_2\left(2^{\frac{\bar{q}\mathcal{H}(p)-p\mathcal{H}(q)}{q-\bar{p}}+2} 2^{\frac{-q\mathcal{H}(p)+\bar{p}\mathcal{H}(q)}{q-\bar{p}}}\right)
 \end{aligned}$$

が得られる.